ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 109 2009 № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 514.752.44

В. А. Мирзоян, Г. С. Мачкалян

Нормально плоские минимальные полуэйнштейновы подмногообразия с однократными главными векторами кривизны

(Посвящается 80-летию академика АН Эстонии Ю. Г. Лумисте)

(Представлено академиком В. С. Захаряном 16/III 2009)

Ключевые слова: *Ric-полусимметрические многообразия, эйнштейновы и полуэйнштейновы многообразия*

Римановы Ric-полусимметрические многообразия являются обобщениями симметрических, полусимметрических и эйнштейновых многообразий. В настоящее время наиболее глубоко исследованы полусимметрические подмногообразия, теории которых посвящена монография Ю.Г. Лумисте [1]. В [2] доказано, что Ric-полусимметрические многообразия разлагаются в прямое произведение двумерных, эйнштейновых и полуэйнштейновых многообразий. Примеры полуэйнштейновых подмногообразий были построены в [3-6]. В [5] в евклидовом пространстве E_n описано нормально плоское минимальное полуэйнштейново подмногообразие с кратными главными векторами кривизны. В настоящей работе в E_n дается геометрическое описание нормально плоских минимальных полуэйнштейновых подмногообразий с однократными главными векторами кривизны. Справедлива следующая

Теорема. *Пусть в евклидовом пространстве E_n m-мерное нормально плоское минимальное полуэйнштейново подмногообразие M индекса дефектности $\mu \geq 1$ имеет в каждой точке q $(q \geq 2)$ ненулевых однократных главных векторов кривизны $n_1, \dots, n_q$, образующих между собой постоянные углы всюду на M. Если соответствующие этим векторам собственные распределения $T^{(1,1)}, \dots, T^{(1,q)}$ параллельны на M друг относительно друга (но не относительно распределения дефектности $T^{(0)}$), то векторы $n_1, \dots, n_q$*

имеют равные модули, образуют попарно равные углы, а M локально имеет вид прямого произведения $E_{m-q-1} \times \tilde{M}$, где E_{m-q-1} — плоскость размерности $m-q-1$, а $\tilde{M}$ представляет собой конус над q-мерным подмногообразием N, которое, как подмногообразие в E_n, обладает следующими свойствами: является эйнштейновым и нормально плоским, принадлежит гиперсфере евклидова пространства $E_{n-m+q+1}$, минимально в этой гиперсфере и представляет собой прямое произведение q окружностей одного и того же радиуса.

Приведем сначала необходимые определения и формулы. Пусть $O(E_n)$ — главное расслоение ортонормированных реперов $\{x, e_1, \dots, e_n\}$ в E_n. Отождествляя точку x с ее радиус-вектором, имеем

$$dx = \omega^A e_A,\ de_A = \omega_A^B e_B,\ \omega_B^A + \omega_A^B = 0, A,B,C = 1,\dots,n,\ d\omega^A = \omega^B \wedge \omega_B^A,\ d\omega_A^B = \omega_A^C \wedge \omega_C^B.$$

Пусть M является m-мерным подмногообразием в E_n. Тогда расслоение $O(E_n)$ может быть приведено к главному расслоению $O(M, E_n)$ адаптированных ортонормреперов $\{x, e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$, характеризуемых тем, что $e_i \in T_x(M)$, $i, j, \dots = 1, \dots, m$, $e_\alpha \in T_x^\perp(M)$, $\alpha, \beta, \dots = m+1, \dots, n$. В силу этого по известной схеме (см. [1], [5]) получим

$$\omega^\alpha = 0,\ \omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j,\ h_{ij}^\alpha = h_{ij}^\alpha,\ \overline{\nabla} h_{ij}^\alpha = h_{ijk}^\alpha \omega^k,\ h_{ijk}^\alpha = h_{ikj}^\alpha (= \overline{\nabla}_k h_{ij}^\alpha),$$

$$\overline{\nabla} h_{ijk}^\alpha \wedge \omega^k = h_{ij}^\beta \Omega_\beta^\alpha - h_{kj}^\alpha \Omega_i^k - h_{ik}^\alpha \Omega_j^k,\ \overline{\nabla} h_{ij}^\alpha = dh_{ij}^\alpha + h_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha - h_{kj}^\alpha \omega_i^k - h_{ik}^\alpha \omega_j^k.$$

Здесь $\overline{\nabla}$ — связность Ван дер Вардена—Бортолотти, ∇ — риманова связность на M, определяемая формами ω_i^j, а $\nabla^\perp$ — нормальная связность, определяемая формами ω_β^α. Функции h_{ij}^α являются компонентами второй α_2 фундаментальной формы. Формулы

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j = -\sum_\alpha h_{i[k}^\alpha h_{l]j}^\alpha \omega^k \wedge \omega^l,\ \Omega_\alpha^\beta = d\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta = - = -\sum_i h_{i[k}^\alpha h_{l]i}^\beta \omega^k \wedge \omega^l$$

$$R_{ikl}^j = -\sum_\alpha h_{i[k}^\alpha h_{l]j}^\alpha,\ R_{\alpha kl}^\beta = -\sum_i h_{i[k}^\alpha h_{l]j}^\beta$$

определяют формы кривизны и компоненты тензоров кривизны R и $R^\perp$ связностей ∇ и $\nabla^\perp$ соответственно. Компоненты R_{ik} тензора Риччи R_1 определяются по формуле $R_{ik} = R_{ikl}^l = \sum\limits_\alpha (h_{il}^\alpha h_k^{\alpha l} - H^\alpha h_{ik}^\alpha)$, где $h_k^{\alpha l} = h_{kl}^\alpha$, а $H^\alpha = h_{ij}^\alpha \delta^{ij}$ — компоненты вектора средней кривизны $H = H^\alpha e_\alpha$. Если $H = 0$, то подмногообразие называется минимальным.

Пусть подмногообразие M является нормально плоским, т.е. $R_{\alpha ij}^\beta = 0$. Тогда все матрицы $\|h_{ij}^\alpha\|$ коммутируют между собой. В силу этого в некотором ортонормрепере они могут быть приведены к диагональному виду $\|h_i^\alpha \delta_{ij}\|$. Тогда

$$R_{ik} = \rho_i \delta_{ik}, \quad \rho_i = \sum_\alpha [(\lambda_i^\alpha)^2 - H^\alpha \lambda_i^\alpha].$$

Нормальные векторы $n_i = \lambda_i^\alpha e_\alpha$ называются главными векторами кривизны нормально плоского подмногообразия в E_n. Легко видеть, что $H = n_1 + \ldots + n_m$.

Пусть $T_x^{(0)}$, $T_x^{(1)}$, T_x обозначают пространства дефектности, кодефектности и относительной дефектности подмногообразия M в точке x. Если на $T_x^{(1)}$ тензор Риччи имеет только одно ненулевое собственное значение, то подмногообразие M называется полуэйнштейновым. Справедливо включение $T_x' \subset T_x^{(0)}$. В [5] доказано, что а) пространство дефектности нормально плоского минимального подмногообразия M в E_n в каждой точке совпадает с пространством относительной дефектности, б) если коразмерность нормально плоского минимального полуэйнштейнова подмногообразия M в E_n равна $n-m$, то в схемах главных векторов кривизны, в которых углы между векторами попарно равны, максимальное число векторов может быть равно $n-m+1$. Угол φ между векторами определяется равенством $\cos\varphi = -(q-1)^{-1}$. За всеми остальными сведениями отсылаем к монографиям [1,7,8].

Доказательство теоремы. Пусть m-мерное нормально плоское минимальное полуэйнштейново подмногообразие M в E_n имеет только q различных однократных ненулевых главных векторов кривизны $n_1, \ldots, n_q$ и нулевой главный вектор кривизны кратности $\mu \geq 1$. Тогда $dim T_x^{(1)} = q$. Поскольку M является минимальным, то $\rho_i = |n_i|^2$ и условие полуэйнштейновости равносильно $|n_i|^2 = \rho$. Таким образом $n_1 + \ldots + n_q = 0$, $|n_1| = \ldots = |n_q| = \sqrt{\rho}$. В дальнейшем будем предполагать, что всюду на M векторы n_i образуют между собой постоянные углы, которые не меняются от точки к точке. Поскольку модули векторов n_i равны, то существует ортогональное преобразование, которое переводит вектор n_1 в вектор n_i для каждого $i > 1$.

Следовательно, $\lambda_i^\alpha = a_{i\beta}^\alpha \lambda_1^\beta$, $i > 1$, где элементы матрицы $A_i = (a_{i\beta}^\alpha)$ являются постоянными. Поскольку нормальная связность подмногообразия M плоская, то нормальные к M векторные поля e_α можно выбрать так, чтобы они были параллельными в нормальном расслоении, что равносильно $\omega_\beta^\alpha = 0$ (см.[7]).

Уравнения подмногообразия в настоящем случае принимают следующий вид:

$$\omega^\alpha = 0,\ \omega_i^\alpha = \lambda_i^\alpha = \delta_{ij}\omega^j,\ (d\lambda^\alpha)\delta_{ij} + (\lambda_j^\alpha - \lambda_i^\alpha)\omega_j^i = h_{ijk}^\alpha \omega^k,$$

где в левой части нет суммирования по i. Пусть адаптированный к M ортонормрепер выбран так, что

$$e_\varphi \in T_x^{(1)},\ e_\gamma \in T_x^{(0)},\ e_\alpha \in T_x^\perp(M),\ \varphi,\phi,\chi = 1,\ldots,q,\ r,s,t = q+1,\ldots,m,\ \alpha,\beta = m+1,\ldots,n.$$

Пусть $e_\varphi \in T_x^{(1,\varphi)}$, где $T_x^{(1,\varphi)}$ обозначает подпространство касательного пространства $T_x(M)$, на котором каждая матрица $\|h_{ij}^\alpha\|$ имеет собственное значение λ_φ^α; $T_x^{(1,\varphi)}$ называется собственным подпространством, соответствующим вектору n_φ. Поскольку векторы n_φ являются однократными, то $dim T_x^{(1,\varphi)} = 1$. Рассуждая так же, как и в [5] и [6], будем иметь

$$(\lambda_\phi^\alpha - \lambda_\varphi^\alpha)\omega_\phi^\alpha = h_{\varphi\phi k}^\alpha,\ d\lambda_\varphi^\alpha = h_{\varphi\varphi k}^\alpha \omega^k,\ h_{\varphi\phi k}^\alpha = 0,\ \varphi \neq \phi.$$

На основании $\lambda_i^\alpha = a_{i\beta}^\alpha \lambda_1^\beta$ получим $h_{\varphi\varphi k}^\alpha = a_{\varphi\beta}^\alpha h_{11k}^\beta$, $\varphi > 1$. Следовательно, $h_{\varphi\varphi\varphi}^\alpha = 0$ при $\varphi > 1$. Если $k = 1$, то из $a_{\varphi\beta}^\alpha h_{111}^\beta = 0$ следует, что $h_{111}^\beta = 0$. Таким образом, $h_{\varphi\varphi\varphi}^\alpha = 0$ для любого φ. Так же, как и в [5] и [6], получаем следующую систему:

$$d\ln|\lambda_\varphi^\alpha| = F_r\omega^r,\ \omega_\varphi^r = F_r\omega^\varphi,\ \omega_\varphi^\phi = 0,\ \varphi \neq \phi, \tag{1}$$

где $F_r = \rho^{-1}\sum\limits_\alpha \lambda_\varphi^\alpha h_{r\varphi\varphi}^\alpha$ не зависит от φ. Легко проверить, что распределение $T^{(1,\varphi)}$ интегрируемо. Его интегральное многообразие представляет собой некоторую кривую, которую обозначим через $M^{(\varphi)}$. Распределение $T^{(1)} = T^{(1,1)} + \ldots + T^{(1,q)}$, которое задается системой $\omega^\alpha = 0$, $\omega^r = 0$, также является интегрируемым. Его интегральное многообразие максимальной размерности будем обозначать через N Очевидно, что $dim\, N = q$. Так же, как и в [5] и [6], доказывается, что N локально является прямым произведением кривых $M^{(\varphi)}$, т.е. $N = M^{(1)} \times \ldots \times M^{(q)}$, имеет плоскую нормальную связность и $\omega_r^s = \Gamma_{rt}^s\omega^t$. Внешнее дифференцирование уравнений (1) и применение леммы Картана приводит к следующей системе:

$$dF_r = (F_s\Gamma_{rt}^s + F_rF_t)\omega^t,\ \sum_r (F_r)^2 + \sum_\alpha \lambda_\varphi^\alpha\lambda_\phi^\alpha = 0,\ \varphi \neq \phi. \tag{2}$$

Если рассматривать N как подмногообразие в M, то из второго уравнения следует, что на M секционные кривизны в направлениях $e_\varphi \wedge e_\phi$ отрицательны и равны между собой. Это значит, что скалярные произведения векторов $n_1, \ldots, n_q$ отрицательны и равны между собой. Так как модули этих векторов равны, то равны и отрицательны косинусы углов между этими векторами. Поэтому все углы равны φ, $90^o < \varphi \leq 180^o$. Тогда $\cos\varphi = -\frac{1}{q-1}$ и, следовательно,

$$\sum_\alpha \lambda_\varphi^\alpha\lambda_\phi^\alpha =< n_\varphi, n_\phi >= \rho\cdot\cos\varphi = -\frac{\rho}{q-1},\ \sum_r (F_r)^2 = \frac{\rho}{q-1}.$$

Отсюда и из (1) следует, что λ_1^{m+1} и F_r постоянны на N. Так как на N $\omega_r^\alpha = 0$, $\omega_r^s = 0$, то нормальное к N векторное поле $\xi = \sum\limits_r F_re_r$ параллельно в нормальном расслоении. Выбирая параллельное нормальное к N векторное поле e_m так, что $\xi = \eta e_m$, $\eta > 0$, получим $F_r = 0$, $r = 4, \ldots, m-1$, $F_m = \eta$. Теперь легко проверить, что N является эйнштейновым подмногообразием.

Если $\eta = 0$, то нетрудно показать, что M является m-мерной плоскостью, т.е. не является полуэйнштейновым подмногообразием. Пусть $\eta \neq 0$.

Поскольку $\omega^r_\varphi = F_r\omega^\varphi$, то $\omega^\varphi_m = -F_m\omega^\varphi = -\eta\omega^\varphi$. Следовательно, отождествляя точку $x \in N$ с радиус-вектором, будем иметь $d(x + \eta^{-1}e_m) = \omega^\varphi e_\varphi + \eta^{-1}\omega^\varphi_m e_\varphi = 0$. Тогда $x + \eta^{-1}e_m = \mathrm{const}$ и подмногообразие N принадлежит некоторой гиперсфере $S^{n-1}(\overline{R})$ пространства E_n, для которой вектор e_m является нормальным. Так как M является минимальным и $F_r = 0$ при $r \neq m$, то нормальный к N вектор ηe_m является вектором средней кривизны для N. Однако поскольку вектор e_m ортогонален к гиперсфере $S^{n-1}(\overline{R})$, то N является минимальным в этой гиперсфере, но не минимальным в E_n.

Поскольку $F_r = 0$ при $r \neq m$ и $F_m = \eta > 0$, то из (2) следует, что $\Gamma^m_{rt} = 0$. Следовательно, $\omega^m_r = 0$ и так как $\omega^r_\varphi = 0$ при $r \neq m$ (что следует из (1)), то распределение K, сопоставляющее каждой точке подмногообразия M линейную оболочку векторов e_r, $r \neq m$, является параллельным на M и вполне интегрируемым. Его интегральное многообразие представляет собой $(m-q-1)$-мерную плоскость, которую обозначим через E_{m-q-1}. Ортогональное дополнение к K_x в касательном пространстве $T_x(M)$ имеет вид $T^{(1,1)}_x + \ldots + T^{(1,q)}_x + L_x$, где L_x — прямая с направляющим вектором e_m. Соответствующее распределение $T^{(1,1)} + \ldots + T^{(1,q)} + L$ также параллельно на M и вполне интегрируемо. Его интегральное многообразие будем обозначать через $\tilde{M}$. Следовательно, $M = E_{m-q-1} \times \tilde{M}$. Здесь $\tilde{M}$ представляет собой $(q+1)$-мерное полуэйнштейново подмногообразие в $E_{n-m+q+1}$ и имеет коразмерность $n-m$.

Поскольку $de_m = -\eta\omega^\varphi e_\varphi$, то $e_m = \mathrm{const}$ при $\omega^\varphi = 0$, и так как $\eta \neq 0$, то $\tilde{M}$ является конусом над N. Так как E_{m-q-1} является евклидовым пространством, то в качестве локальных координат на E_{m-q-1} можно взять прямоугольные декартовы координаты. Тогда $\omega^s_r = 0$ при любых значениях индексов. Отсюда и на основании равенств (1) и (2) получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} &d\ln|\lambda^{m+1}_\varphi| = \eta\omega^m,\ \omega^r_\varphi = 0,\ r \neq m,\ \omega^m_\varphi = \eta\omega^\varphi,\\ &\omega^\phi_\varphi = 0, \varphi \neq \phi, d\eta = \eta^2\omega^m,\ \sum_\alpha \lambda^\alpha_\varphi\lambda^\alpha_\phi = -\eta^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Выясним, что представляет собой кривая $M^{(\varphi)}$ при фиксированном значении φ. Поскольку $M^{(\varphi)}$ задается ситемой $\omega^\alpha = 0$, $\omega^\phi = 0$, $\phi \neq \varphi$, $\omega^r = 0$, то легко проверить, что $d\omega^\varphi = 0$, и можем считать, что $\omega^\varphi = ds_\varphi$, где s_φ — натуральный параметр вдоль $M^{(\varphi)}$. Имея в виду, что λ^α_φ и η являются постоянными при $\omega^r = 0$, легко подсчитать, что

$$\frac{de_\varphi}{ds_\varphi} = n_\varphi + \eta e_m,\ \frac{d^2e_\varphi}{ds^2_\varphi} = -(|n_\varphi|^2 + \eta^2)e_\varphi.$$

Отсюда следует, что $M^{(\varphi)}$ содержится в плоскости векторов e_φ и $n_\varphi + \eta e_m$, т.е. является плоской кривой. Поскольку величина $|n_\varphi|^2 + \eta^2$ является постоянной, то $M^{(\varphi)}$ представляет собой окружность радиуса $(|n_\varphi|^2 + \eta^2)^{-\frac{1}{2}}$. Так как $|n_1| =$

$\ldots = |n_q|$, то все кривые M^ϕ являются окружностями одного и того же радиуса. Таким образом, N является прямым произведением q одинаковых окружностей. На $\tilde{M}$ интегральное многообразие распределения L есть прямая с единичным вектором e_m. Обозначим через x^m координату на этой прямой. Поскольку $d\omega^m = \omega^r \wedge \omega_r^m + \omega^\varphi \wedge \omega_\varphi^m + \omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^m = 0$, то можем считать, что $\omega^m = dx^m$. Подставляя в (3) и интегрируя, находим

$$\eta = (C - x^m)^{-1}, \quad \lambda_\varphi^\alpha = C_\varphi^\alpha (C - x^m)^{-1},$$

где C и C_φ^{m+1} — постоянные интегрирования. Постоянные C_φ^α должны удовлетворять также следующим условиям:

$$\sum_\varphi C_\varphi^\alpha = 0,\ \sum_\alpha C_\varphi^\alpha C_\phi^\alpha = -1,\ \varphi \neq \phi,\ \sum_\alpha (C_\varphi^\alpha)^2 = q - 1. \tag{4}$$

Существование постоянных C_φ^α, удовлетворяющих этим условиям, доказано в [5]. Пусть η и λ_φ^α определяются полученными формулами и пусть выполняются условия (4). Рассмотрим в E_n следующую дифференциальную систему:

$$\omega^\alpha = 0,\ \omega_\beta^\alpha = 0,\ \omega_r^\alpha = 0,\ \omega_s^r = 0,\ \omega_\varphi^\phi = 0,$$

$$\omega_\varphi^\alpha = \lambda_\varphi^\alpha \omega^\varphi,\ d\ln|\lambda_\varphi^\alpha| = \eta\omega^m,\ d\eta = \eta^2\omega^m,\ \omega_\varphi^m = \eta\omega^\varphi,\ \omega_\varphi^r = 0,\ r \neq m.$$

Путем прямого вычисления легко доказать, что эта система вполне интегрируема. Она и задает описанное выше нормально плоское минимальное полуэйнштейново подмногообразие $M = E_{m-q-1} \times \tilde{M}$, что и доказывает существование рассматриваемого класса подмногообразий. Теорема доказана.

Государственный инженерный университет Армении

В. А. Мирзоян, Г. С. Мачкалян

Нормально плоские минимальные полуэйнштейновы подмногообразия с однократными главными векторами кривизны

В евклидовых пространствах дается геометрическое описание нормально плоских минимальных полуэйнштейновых подмногообразий с однократными ненулевыми главными векторами кривизны в предположении, что соответствующие этим векторам собственные распределения параллельны друг относительно друга.

Վ. Ա. Միրզոյան, Գ. Ս. Մաճկալյան

Միապատիկ գլխավոր կորության վեկտորներով նորմալ հարթ մինիմալ կիսաէյնշտեյնյան ենթաբազմաձևություններ

Էվկլիդեսյան տարածություններում տրվում է միապատիկ ոչ զրոյական գլխավոր կորության վեկտորներով նորմալ հարթ մինիմալ կիսաէյնշտեյնյան ենթաբազմաձևությունների երկրաչափական նկարագրությունը ենթադրությամբ, որ այդ վեկտորներին համապատասխանող սեփական բաշխումները զուգահեռ են իրար նկատմամբ:

V. A. Mirzoyan, G. S. Machkalyan

Normally Flat Minimal Semi-Einstein Submanifolds with Principial Curvature Vectors of multiplicity

In Euclidean spaces a geometric description of normally flat minimal semi-Einstein submanifolds with non-zero principal curvature vectors of multiplicity is given provided that the eigen distributions, corresponding to these vectors, are parallel with respect to each other.

Литература

1. *Lumiste U.* Semiparallel Submanifolds in Space Forms. New York: Springer. 2009.
2. *Мирзоян В.А.* - Изв. вузов. Математика. 1992. N6. С. 80-89.
3. *Мирзоян В.А.* - Изв. РАН. Сер. математическая. 2003. Т. 67. N5. С. 107-124.
4. *Мирзоян В.А.* - Математический сборник. 2000. Т. 191. N9. С. 65-80.
5. *Мирзоян В.А.* - Математический сборник. 2006. Т. 197. N7. С. 47-76.
6. *Мирзоян В.А.* - Математический сборник. 2008. Т. 199. N3. С. 69-94.
7. *Chen B.* - Y. Geometry of submanifolds. New York. Marcel Dekker. 1973.
8. *Chern S.S., Chen W.H., Lam K.S.* Lectures on differential geometry. Singapore. World Scientific. 2000.