ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 109 2009 № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

Член-корреспондент НАН РА В. А. Мартиросян, С. Е. Мкртчян

О приближении в среднем полиномами с пропусками на не-Каратеодориевых областях

(Посвящается 80-летию академика А. А. Талаляна)

(Представлено 23/I 2009)

Ключевые слова: *приближение в среднем по площади, полином с пропусками, не-Каратеодориева*

Введение. Настоящая работа продолжает начатое в [1] исследование вопросов аппроксимации в среднем полиномами с пропусками. Полученные в указанной статье результаты относились к случаю аппроксимации на классе Каратеодориевых множеств (областей). В данной работе аналогичные вопросы изучаются для известных подклассов не-Каратеодориевых областей (области с граничными разрезами, традиционные луночки, обобщенные луночки). Найденные результаты подтверждают подмеченное в [1] наблюдение, что при аппроксимации в среднем (по сравнению с равномерной аппроксимацией) возникают интересные специфические особенности.

Чтобы сформулировать основные результаты статьи, введем некоторые обозначения. Пусть, как обычно, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ будут, соответственно, множества из всех натуральных, вещественных, положительных вещественных чисел, $\mathbb{C}$ и $\overline{\mathbb{C}}$ – комплексная и расширенная комплексная плоскости. Для подпоследовательности $\{p_n\}_1^\infty$ из $\mathbb{N}$ обозначим через $\{q_n\}_1^\infty$ последовательность, дополнительную к $\{p_n\}_1^\infty$ относительно $\mathbb{N}$. Положим

$$D_r(a)=\{z:|z-a|<r\} \text{ для } \quad a\in\mathbb{C},\ \ r\in\mathbb{R}_+,$$

$$\Delta_{\beta}^{\alpha} = \{z : |z| \le s, |\arg z - \alpha \log|z|| \le \beta\} \text{ для } \alpha \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{R}_+,\ \beta \in [0, \pi).$$

Функцию $V : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую условию $t\dfrac{V'(t)}{V(t)} \uparrow +\infty$ при $t \downarrow 0$, будем называть регулярной. Пусть Ω – ограниченная область плоскости $\mathbb{C}$. Через $\partial\Omega$, $\overline{\Omega}$, Ω_∞ будем обозначать, соответственно, границу, замыкание и неограниченную компоненту связности дополнения $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ к ее замыканию. Пусть $L_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, – банахово пространство, элементами которого являются все определнные на Ω измеримые комплексные функции комплексного переменного $z = x + iy$, имеющие конечную норму

$$\|f\|_p = \left\{\iint_\Omega |f|^p \, dxdy\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Подпространство этого пространства, состоящее из голоморфных на Ω функций, обозначим $H_p(\Omega)$. Определим также банахово пространство $h_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, состоящее из всех определенных на Ω действительных функций u, которые гармоничны на Ω и имеют конечную норму $\|u\|_p$. Плоскую меру Лебега измеримого множества $E \subset \mathbb{C}$ будем обозначать $measE$.

1. Метрический критерий аппроксимации Мергеляна – Бреннана. Класс Каратеодориевых множеств (областей) определяется своими *топологическими* свойствами и, как известно, на множествах этого класса всегда возможна полиномиальная аппроксимация в среднем. Что касается возможности полиномиальной аппроксимации в среднем на не-Каратеодориевых множествах (областях), то она оказывается зависящей уже от *метрических* свойств множества аппроксимации в окрестности ее границы. Этот феномен впервые был открыт академиком М.В. Келдышем в 1939 г. [2] и исследовался в дальнейшем рядом авторов. Приведем сперва общий критерий полиномиальной аппроксимации в среднем, справедливый для широкого класса не-Каратеодориевых областей.

Теорема А. *Пусть Ω – ограниченная односвязная область, для которой существует последовательность точек $\{\varsigma_n\}_1^\infty$, имеющая следующие свойства:*

1) *замыкание множества точек $\{\varsigma_n\}_1^\infty$ содержит $\partial\Omega$;*
2) *каждую точку ς_n можно соединить с $\partial\Omega_\infty$ спрямляемой дугою Γ такою, что:*
   a) $meas\,\Omega_t(\Gamma) \le V(t)$,
   где $\Omega_t(\Gamma) = \{z \in \Omega : dist(z, \Gamma) \le t\}$, $t > 0$, а V – какая-либо регулярная мажоранта;
   b) $\displaystyle\int_0 \log\log\frac{1}{V(t)}\,dt = +\infty$.

Тогда множество полиномов плотно в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$.

Отметим, что теорема А и ее точность доказаны Дж. Бреннаном [3]. Они обобщают и усиливают соответствующие результаты С.Н. Мергеляна (см. [4,5]).

Соответствующие теореме А результаты об аппроксимации в среднем лакунарными полиномами приводятся ниже в теоремах 1 – 4.

Теорема 1. *Пусть* Ω – *ограниченная односвязная область, удовлетворяющая предположениям теоремы А,* $0 \in \Omega_\infty$, *и* $\{p_n\}_1^\infty$ – *подпоследовательность из* $\mathbb{N}$, *удовлетворяющая условию*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{p_n} = 1. \tag{1}$$

Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ *полна в пространстве* $H_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$.

Теорема 2. *Пусть* $\{p_n\}_1^\infty$ *– подпоследовательность из* $\mathbb{N}$, *удовлетворяющая условию*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{p_n} = 1, \tag{2}$$

Ω *– ограниченная односвязная область, удовлетворяющая предположениям теоремы А,* $0 \in \partial\Omega_\infty$, *и существует последовательность* $\{z_m\} \subset \Omega_\infty$ *такая, что* $z_m \to 0$ *и*

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{|z_m|}{dist(z_m, \partial\Omega_\infty)} < \infty. \tag{3}$$

Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ *полна в пространстве* $H_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$.

Теорема 3. *Пусть* $\{p_n\}_1^\infty$ – *подпоследовательность из* $\mathbb{N}$, Ω – *ограниченная односвязная область, удовлетворяющая предположениям теоремы А,* $0 \in \partial\Omega_\infty$, *и является достижимой граничной точкой для* Ω_∞. *Тогда система функций* $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ *полна в пространстве* $H_p(\Omega)$, $1 \le p < 2$, *при выполнении одного из следующих условий:*

1) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{q_n} < \infty, \qquad \frac{n}{q_n} \downarrow 0$ *при* $n \to \infty$;

2) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(\log q_n)^{1+\varepsilon}}{q_n} < \infty$ *для* $\varepsilon > 0$;

3) 0 является достижимой граничной точкой прямолинейным отрезком для Ω_∞ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{q_n}<\infty$.

Теорема 4. *Пусть* Ω – *ограниченная односвязная область, удовлетворяющая предположениям теоремы А,* $0\in\overline{\Omega}_\infty$ *и* $\Omega\subset\Delta_\beta^\alpha$, $\{p_n\}_1^\infty$ *– подпоследовательность из* $\mathbb{N}$*, удовлетворяющая условию*

$$\varlimsup_{r\to\infty}\left[\sum_{p_n\le r}\frac{1}{p_n}-\frac{\beta}{\pi}\log r\right]=+\infty\,. \qquad (4)$$

Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ *полна в пространстве* $H_p(\Omega)$, $1\le p<\infty$.

Замечание 1. Интересно отметить, что теорема 3 (в отличие от теорем 1,2,4) не имеет естественного аналога в случае равномерной аппроксимации лакунарными полиномами (см. [6]).

2. Области с граничными разрезами. Перейдем к рассмотрению более узких (по сравнению с теоремой А) классов не-Каратеодориевых областей. Выделим сперва области с граничными разрезами. Их типичные примеры доставляют Жордановы области с удаленными разрезами, которые являются Жордановыми дугами, соединяющими внутренние точки области с ее граничными точками. Ради простоты мы ограничимся здесь случаем круга с радиальными разрезами. Приведем сначала соответствующий этому случаю результат о полиномиальной аппроксимации в среднем.

Пусть E – совершенное нигде не плотное точечное множество на окружности $\partial D_r(a)$. Для каждого $w\in E$ обозначим

$$S_w=\{z:\arg(z-a)=\arg(w-a),\ r-\rho\le|z-a|\le r\},\quad 0<\rho<r\,,$$

и положим $S_E=\bigcup\limits_{w\in E}S_w$. Фиксируя ρ, рассмотрим множество

$$\Omega_E=D_r(a)\setminus S_E\,.$$

Итак, Ω_E – ограниченная односвязная область, граница которой $\partial\Omega_E$ состоит почти целиком из радиальных разрезов. Для $w\in\partial D_r(a)$ и $t\in\mathbb{R}_+$ положим

$$\Delta_t(w)=D_t(w)\cap\partial D_r(a)$$

и обозначим через Λ линейную меру Лебега.

Теорема В *(см. [3]). Пусть существует счетное множество* E'*, всюду плотное в* E*, такое, что для каждого* $w\in E'$*:*

1) $\Lambda(\Delta_t(w)\cap(\partial D_r(a)\setminus E))\le V(t)$ *при* $t\le t(w)$, *для некоторой регулярной мажоранты* V *;*

2) $\int\limits_0 \log\log\frac{1}{V(t)}dt=+\infty$.

Тогда множество полиномов плотно в пространстве $H_p(\Omega_E)$, $1\le p<\infty$.

Следующий результат является лакунарным аналогом теоремы B.

Теорема 5. *Пусть область* Ω_E *удовлетворяет предположениям теоремы B, причем* $r\le|a|$, *и подпоследовательность* $\{p_n\}_1^\infty$ *из* $\mathbb{N}$ *удовлетворяет условию*

$$\varlimsup_{r\to\infty}\left[\sum_{p_n\le r}\frac{1}{p_n}-\frac{\beta}{\pi}\log r\right]=+\infty\ ,\ \beta=\arcsin\frac{r}{|a|}\ .$$

Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ *полна в пространстве* $H_p(\Omega_E)$, $1\le p<\infty$.

3. Лунообразные области. Другой важный класс не-Каратеодориевых областей образуют лунообразные области (луночки). Такие области были хронологически первыми не-Каратеодориевыми областями, изученными в связи с возможностью полиномиальной аппроксимации в среднем. Традиционно луночка понимается как односвязная область, топологически эквивалентная области, ограниченной двумя внутренне касающимися окружностями. Для традиционных луночек имеют место следующие результаты.

Теорема C. *Пусть* Ω *– луночка с кратной граничной точкой в начале координат, которая расположена между двумя окружностями* $\partial D_{|a|}(a)$ *и* $\partial D_{|a/2|}(a/2)$. *Обозначим через* $l(r)$ *линейную меру множества* $\Omega\cap\partial D_r$ *и предположим, что* $r\frac{l'(r)}{l(r)}\uparrow+\infty$ *при* $r\downarrow 0$. *Тогда множество полиномов плотно в пространстве* $H_p(\Omega)$, $1\le p<\infty$, *тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_0 \log l(r)dr=-\infty\ .$$

Теорема D. *Пусть* Ω *– луночка с кратной граничной точкой* x_0 , *для которой существует прямолинейный отрезок* L *от точки* x_0 *вовнутрь ограниченной компоненты для* $\mathbb{C}\setminus\overline{\Omega}$ *такой, что* $dist(z,L)\ge C\,dist(z,x_0)^k$ *для любого* $z\in\Omega$ *и некоторых постоянных* $k>0, C>0$. *Обозначим через* $l(r)$ *линейную меру множества* $\Omega\cap\partial D_r(x_0)$ *и предположим, что:*

1) $r\frac{l'(r)}{l(r)}\uparrow+\infty$ *при* $r\downarrow 0$ *;*

2) $\int\limits_0 r^{k-1}\log\log\frac{1}{l(r)}dr=+\infty$.

Тогда множество полиномов плотно в пространстве $H_p(\Omega)$, $1\le p<\infty$.

Замечание 2. Теорема C доказана академиками А.Л. Шагиняном и М.М. Джрбашяном (необходимость и достаточность интегрального условия, соответственно). Теорема D принадлежит Дж. Бреннану. Существенное различие между ними состоит в том, что в теореме C луночка Ω не имеет выступа в кратной граничной точке, а в теореме D – может иметь (см. [3]).

Обратимся к лакунарным версиям теорем C, D.

Теорема 6. *Пусть* Ω *– луночка, удовлетворяющая предположениям теоремы C,* $\{p_n\}_1^\infty$ *– подпоследовательность из* $\mathbb{N}$*, удовлетворяющая условию*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\left[\sum_{p_n\le r}\frac{1}{p_n}-\frac{1}{2}\log r\right]=+\infty.$$

Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ *полна в пространстве* $H_p(\Omega)$, $1\le p<\infty$.

Теорема 7. *Пусть* Ω *– луночка, удовлетворяющая предположениям теоремы D,* $0\in\Omega_\infty$*, и* $\{p_n\}_1^\infty$ *- подпоследовательность из* $\mathbb{N}$*, удовлетворяющая условию (1). Тогда система функций* $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ *полна в пространстве* $H_p(\Omega)$, $1\le p<\infty$.

Теорема 8. *Пусть* $\{p_n\}_1^\infty$ *– подпоследовательность из* $\mathbb{N}$*, удовлетворяющая условию (2), и* Ω *– луночка, удовлетворяющая предположениям теоремы D,* $x_0=0$ *и существует последовательность* $\{z_m\}\subset\Omega_\infty$ *такая, что* $z_m\to 0$ *и выполняется условие (3). Тогда система функций* $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ *полна в пространстве* $H_p(\Omega)$, $1\le p<\infty$.

Теорема 9. *Пусть* $\{p_n\}_1^\infty$ *– подпоследовательность из* $\mathbb{N}$*,* Ω *– луночка, удовлетворяющая предположениям теоремы D и* $x_0=0$*. Тогда система функций* $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ *полна в пространстве* $H_p(\Omega)$, $1\le p<2$*, при выполнении одного из условий 1) - 3) теоремы 3.*

Теорема 10. *Пусть* Ω *– луночка, удовлетворяющая предположениям теоремы D,* $0\in\overline{\Omega}_\infty$ *и* $\Omega\subset\Delta_\beta^\alpha$*,* $\{p_n\}_1^\infty$ *– подпоследовательность из* $\mathbb{N}$*, удовлетворяющая условию (4). Тогда система функций* $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ *полна в пространстве* $H_p(\Omega)$, $1\le p<\infty$.

4. Обобщенные лунообразные области. По сравнению с традиционными луночками, рассмотреными в 3, более обширный класс не-Каратеодориевых областей образуют обобщенные лунообразные области. Изучение возможности полиномиальной аппроксимации в среднем на таких областях было начато в работах Дж. Бреннана, В. Хавина, В. Мазьи (см [7-9]). Напомним, что под обобщенной лунообразной областью понимается область Ω, замыкание которой $\overline{\Omega}$ есть компактное связное множество с дополнением $\mathbb{C}\setminus\overline{\Omega}$, состоящим из двух компонент связности: неограниченной компоненты Ω_∞ и ограниченной компоненты G, причем $\partial G\cap\partial\Omega_\infty\neq\varnothing$. В частном случае, когда множество $\partial G\cap\partial\Omega_\infty$ состоит из одного элемента, получается традиционная луночка. Типичным примером обобщенной лунообразной области является внутренняя змейка – односвязная область, наматывающаяся изнутри круга к его границе.

Для обобщенных луночек имют место следующие теоремы о полиномиальной аппроксимации в среднем (см [10]).

Теорема E. *Пусть* Ω *– обобщенная луночка,* $\mathbb{C}\setminus\overline{\Omega}=\Omega_\infty\cup G$. *Предположим, что граница ограниченной компоненты* ∂G *является Жордановой кривою класса* C^1 *и ее внешняя единичная нормаль* n *удовлетворяет условию Липшица*

$$|n(z_1)-n(z_2)|\le C|z_1-z_2| \text{ при всех } z_1,z_2\in\partial G,$$

где $C>0$ *– постоянная. Тогда множество полиномов плотно в пространстве* $H_p(\Omega)$, $1\le p<\infty$, *тогда и только тогда, когда*

$$\int_{\partial G}\log\delta(z)|dz|=-\infty,\ \ \delta(z)=dist(z,\partial\Omega_\infty).$$

Теорема F. *Пусть* Ω *– обобщенная луночка и* ω *– гармоническая мера на* ∂G *относительно какой-либо фиксированной точки* $x_0\in G$. *Тогда существует универсальная постоянная* $\tau>0$ *такая, что если*

$$\int_{\partial G}\log\delta(z)d\omega(z)=-\infty,$$

то множество полиномов плотно в пространстве $H_p(\Omega)$ *при* $1\le p<3+\tau$.

Как и в случае традиционных луночек, для обобщенных луночек справедливы следующие лакунарные версии теорем E, F.

Теорема 11. *Пусть обобщенная луночка* Ω *и число* p *удовлетворяют предположениям теоремы E (или F),* $0\in\Omega_\infty$ *и подпоследовательность* $\{p_n\}_1^\infty$ *из* $\mathbb{N}$ *удовлетворяет условию (1). Тогда система функций* $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ *полна в пространстве* $H_p(\Omega)$.

Теорема 12. *Пусть подпоследовательность* $\{p_n\}_1^\infty$ *из* $\mathbb{N}$ *удовлетворяет условию (2), а обобщенная луночка* Ω *и число* p *удовлетворяют предположениям теоремы E (или F),* $0 \in \partial\Omega_\infty$ *и существует последовательность* $\{z_m\} \subset \Omega_\infty$ *такая, что* $z_m \to 0$ *и выполняется условие (3). Тогда система функций* $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ *полна в пространстве* $H_p(\Omega)$.

Теорема 13. *Пусть* $\{p_n\}_1^\infty$ *– подпоследовательность из* $\mathbb{N}$, Ω *– обобщенная луночка, удовлетворяющая предположениям теоремы E (или F) и* $0 \in \partial\Omega_\infty$. *Тогда система функций* $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ *полна в пространстве* $H_p(\Omega)$, $1 \le p < 2$, *при выполнении одного из условий 1) – 3) теоремы 3.*

Теорема 14. *Пусть обобщенная луночка* Ω *и число* p *удовлетворяют предположениям теоремы E (или F),* $0 \in \overline{\Omega}_\infty$ *и* $\Omega \subset \Delta_\beta^\alpha$, *подпоследовательность* $\{p_n\}_1^\infty$ *из* $\mathbb{N}$ *удовлетворяет условию (4). Тогда система функций* $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ *полна в пространстве* $H_p(\Omega)$.

5. Аппроксимация гармоническими полиномами. Вопросы полиномиальной аппроксимации в среднем, как хорошо известно, тесно связаны с вопросами аппроксимации в среднем вещественными гармоническими полиномами. Указанная связь подтверждается, в частности, следующим результатом (см. [3]).

Теорема G. *Пусть обобщенная луночка* Ω *такова, что множество полиномов плотно в пространстве* $H_p(\Omega), 1 \le p < \infty$. *Тогда множество вещественных гармонических полиномов плотно в пространстве* $h_p(\Omega), 1 \le p < \infty$.

Комбинируя теорему G с одной из теорем 6 – 14, получим следующее следствие.

Теорема 15. *Пусть обобщенная луночка* Ω, *число* p *и подпоследовательность* $\{p_n\}_1^\infty$ *из* $\mathbb{N}$ *удовлетворяют предположениям одной из теорем 6 – 14. Тогда множество вещественных частей полиномов по системе функций* $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ *плотно в пространстве* $h_p(\Omega)$.

Институт математики НАН РА

Ереванский государственный университет

Член-корреспондент НАН РА В. А. Мартиросян, С. Е. Мкртчян

О приближении в среднем полиномами с пропусками на не-Каратеодориевых областях

Представлены некоторые новые результаты о возможности аппроксимации полиномами с пропусками. Аппроксимация осуществляется в норме пространства L_p, $1 \le p < \infty$ на не-Каратеодориевых областях комплексной плоскости. Найдены лакунарные версии некоторых результатов А.Шагиняна, М.Джрбашяна, С.Мергеляна, Дж. Бреннана.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Վ. Հ. Մարտիրոսյան, Ս. Ե. Մկրտչյան

Ոչ-Կարաթեոդորյան տիրույթների վրա բացթողումներ ունեցող բազմանդամներով միջինում մոտավորությունների մասին

Ներկայացվում են որոշ նոր արդյունքներ բացթողումներ ունեցող բազմանդամներով մոտավորության վերաբերյալ: Մոտավորությունները կատարվում են L_p, $1 \le p < \infty$, տարածության նորմով կոմպլեքս հարթության ոչ-Կարաթեոդորյան տիրույթների վրա: Գտնված են Ա. Շահինյանի, Մ. Ջրբաշյանի, Ս. Մերգելյանի, Ջ. Բրեննանի որոշ արդյունքների լակունար տարբերակներ:

Corresponding member of V. A. Martirosian, S. E. Mkrtchyan

On the Mean Approximation by Polynomials with Gaps on Non-Caratheodory Domains

Some new results on the possibility of approximation by polynomials with gaps are presented. The approximations are done in the norm of the space L_p, $1 \le p < \infty$, on the non-Caratheodory domains in the complex plain. The lacunary versions of some results by A.Shahinian, M.Jerbashian, S.Mergelian, J.Brennan are obtained.

Литература

1. *Мартиросян В.А., Мкртчян С.Е.* – Изв. НАН Армении. Математика. 2008. Т. 43. N6. С. 43-50.
2. *Keldysh M.V.* – Matem. Sbornik. 1939. V. 5(47). P. 391-401.
3. *Brennan J.E.* – Ark. Matem. 1977. V. 15. P. 117-168.
4. *Мергелян С.М.* – ДАН СССР. 1955. Т. 105. N5. С. 901-904.
5. *Мергелян С.М., Тамадян А.Р.* – Изв. Ак. Наук АрмССР. Математика. 1954. Т. 7. С.1-17.
6. *Мартиросян В.А.* – Матем. сборник. 1983. Т. 120. С. 451-472.
7. *Brennan J.E.* – Ark. Matem. 1973. V. 11. P. 167-189.
8. *Хавин В.П., Мазья В.Г.* – Вестник ЛГУ. 1968. Т. 13. С. 64-74.
9. *Хавин В.П., Мазья В.Г.* – Успехи мат. наук. 1972. Т. 27. С. 67-138.
10. *Brennan J.E.* – Izv. Nation. Akad. Nauk. Armenii. Matem. 2004. V. 39. P. 5-48.