ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 109 2009 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.957

О. А. Бабаян

Оптимальное управление летательным аппаратом при полете с заданной скоростью

(Представлено академиком В.С. Захаряном 20/I 2009)

Ключевые слова: *траектория полета, летательный аппарат переменной массы, постоянная скорость полета, расход топлива*

1. Определение траектории при полете с постоянной скоростью. В работе рассматривается движение летательного аппарата (ЛА) без крыльев под воздействием реактивной силы $\overrightarrow{F}_R$, силы сопротивления окружающей среды $\overrightarrow{F}_r$ и силы притяжения Земли $\overrightarrow{F}_g$

$$\overrightarrow{F_g} = m\overrightarrow{g}, \quad \overrightarrow{F_R} = -k\frac{dm(t)}{dt}\frac{\overrightarrow{V}}{V}, \quad \overrightarrow{F_r} = -\kappa\overrightarrow{V},$$

где $m(t)$ − масса ЛА в момент времени t, $\overrightarrow{V}(t) = (V_1(t), V_2(t))$ − скорость ЛА в момент времени t, $V(t) = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$; k − постоянный коэффициент реактивной силы, κ − коэффициент сопротивления среды, вообще говоря зависящий от V. Предполагаем, что движение ЛА происходит около земной поверхности и зона полета мала по сравнению с радиусом Земли, поэтому ускорение силы тяжести можем считать постоянным вектором $\overrightarrow{g} = (0, -g)$.

Пусть начало координатной системы находится на поверхности Земли и положительное направление оси Oy направлено вертикально вверх. Движение ЛА происходит в плоскости (x, y) от точки $(0, 0)$ до точки (x_0, y_0) $(x_0 > 0, y_0 > 0)$ и описывается уравнением Мещерского ([1])

$$m\frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = \overrightarrow{F_g} + \overrightarrow{F_R} + \overrightarrow{F_r}. \tag{1}$$

Пусть масса ЛА в конечной точке полета задана

$$m(x_0) = m_0. \tag{2}$$

Следует определить начальный вес ЛА. В работе [2] были изучены условия полета ЛА в случае, когда задана горизонтальная компонента вектора скорости. В предлагаемой работе будем предполагать, что модуль вектора скорости — заданная величина. Сначала рассмотрим движение ЛА с постоянной скоростью V, т.е. предполагается, что

$$V(x) = V_0, \quad 0 \le x \le x_0, \tag{3}$$

где V_0 — начальная скорость ЛА. Основные вопросы, рассматриваемые в работе, следующие:

1. При каких V_0 возможен полет от точки $(0, 0)$ до точки (x_0, y_0).

2. Определение основных параметров полета (траектория полета, время полета, расход топлива, реактивная сила и т. п.).

3. При каких значениях V_0 расход топлива за время полета будет минимальным.

В заключительном параграфе будет рассмотрен случай, когда модуль V — произвольная заданная функция.

Переходя к переменной x и записывая (1) в координатах, получим следующую систему ([3]):

$$\begin{cases} m\dfrac{dV_1}{dx} = -\dfrac{k}{V}\dfrac{dm}{dx}V_1 - \kappa, \quad 0 \le x \le x_0, \\ mV_1\dfrac{dV_2}{dx} = -\dfrac{k}{V}\dfrac{dm}{dx}V_1V_2 - \kappa V_2 - gm, \quad 0 \le x \le x_0 \end{cases} \tag{4}$$

с краевыми условиями (2), (3). Пусть движение ЛА осуществляется по траектории

$$y = f(x), \quad 0 \le x \le x_0 \tag{5}$$

при

$$f(0) = 0. \tag{6}$$

Отметим, что из (5) следует, что $V_2(x) = f'(x)V_1(x)$ и, следовательно,

$$f'(0) = \frac{V_2(0)}{V_1(0)} = \operatorname{tg}\alpha, \tag{7}$$

где α — угол, который образует вектор $\overrightarrow{V}_0$ — начальная скорость ЛА с положительным направлением оси OX. В работе [3] было доказано, что для того, чтобы кривая (5) была допустимой траекторией полета ЛА при произвольном сопротивлении среды, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$f'''(x) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq x_0, \tag{8}$$

$$-\frac{1+(f'(x))^2}{f''(x)} = \frac{V^2(x)}{g}, \quad 0 \leq x \leq x_0, \tag{9}$$

при этом все неизвестные величины определяются по функции f. Поэтому в дальнейшем предполагаем, что (8) и (9) выполняются. Так как полет проходит с постоянной скоростью $V(x) \equiv V_0$, то правая часть (9) является постоянной величиной, которую в дальнейшем обозначаем $V_0^2 g^{-1} = a$. Разделяя переменные в (9) и затем интегрируя, получаем

$$\operatorname{arctg}(f'(x)) = \alpha - \frac{x}{a}$$

или

$$f'(x) = \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{x}{a}\right). \tag{10}$$

Так как f' непрерывна на отрезке $[0, x_0]$ и

$$f'''(x) = \frac{2}{a^2}\frac{\operatorname{tg}(\alpha - xa^{-1})}{\cos^2(\alpha - xa^{-1})},$$

то, так как f''' удовлетворяет условию (8), из последнего соотношения получим $x_0 a^{-1} \leq \alpha < 0.5\pi$. Из этого условия в частности имеем $x_0 < 0.5a\pi$. Учитывая условие (6), из (10) получим

$$f(x) = a\ln\left(\cos\frac{x}{a} + \operatorname{tg}\alpha\sin\frac{x}{a}\right). \tag{11}$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если*

$$x_0 < \frac{a\pi}{2}, \qquad \frac{x_0}{a} \leq \alpha < \frac{\pi}{2}, \tag{12}$$

то задача (6) — (9) имеет решение, которое определяется формулой (11). При нарушении условий (12) задача (6) — (9) решения не имеет. Здесь α — угол, который образует вектор $\overrightarrow{V}_0$ — начальная скорость ЛА, с положительным направлением оси OX.

Итак, мы получили семейство решений задачи (6) — (9), зависящее от параметра α.

Пусть теперь полет ЛА осуществляется от точки $(0,0)$ до точки (x_0, y_0), т. е. функция (5) удовлетворяет условию

$$f(x_0) = y_0. \tag{13}$$

Подставляя f из (11) в (13), получим

$$\operatorname{tg}\alpha = \left(\exp\frac{y_0}{a} - \cos\frac{x_0}{a}\right)\left(\sin\frac{x_0}{a}\right)^{-1}. \tag{14}$$

Далее, из (12) следует, что $\operatorname{tg}\alpha \geq \operatorname{tg}(x_0 a^{-1})$, поэтому, подставляя $\operatorname{tg}\alpha$ из (14), получаем неравенство, связывающее величину a с координатами точки (x_0, y_0):

$$y_0 \geq -a\ln\cos\frac{x_0}{a}. \tag{15}$$

Из этого неравенства в частности следует, что $y_0 > 0$, а из (12) имеем $a > 2x_0\pi^{-1}$. Рассмотрим функцию $h(z) = -z\ln\cos(x_0 z^{-1})$ на интервале $(2x_0\pi^{-1}, \infty)$. Имеем

$$h'(z) = -\ln\cos(x_0 z^{-1}) - (x_0 z^{-1})\operatorname{tg}(x_0 z^{-1}), \quad h''(z) = x_0^2 z^{-3}\cos^{-2}(x_0 z^{-1}).$$

Так как $h''(z) > 0$ и $\lim\limits_{z\to\infty} h'(z) = 0$, получаем, что $h'(z) < 0$, следовательно, функция h убывает на интервале $(2x_0\pi^{-1}, \infty)$. Учитывая, что $\lim\limits_{z\to\infty} h(z) = 0$ и $\lim\limits_{z\to 2x_0\pi^{-1}} h(z) = \infty$, получаем, что неравенство (15) эквивалентно неравенству $a \geq a_0$, где a_0 единственный корень уравнения $h(z) = y_0$ на интервале $(2x_0\pi^{-1}, \infty)$. Суммируя вышеизложенное, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Для осуществления полета из точки $(0,0)$ в точку (x_0, y_0) с постоянной скоростью $V \equiv V_0$ необходимо и достаточно, чтобы скорость V_0 удовлетворяла условию*

$$V_0 \geq \sqrt{g a_0}, \tag{16}$$

где a_0 — корень уравнения

$$y_0 = -z\ln\cos\frac{x_0}{z}, \quad z > 2x_0\pi^{-1}.$$

При выполнении условия (16) траектория полета определяется формулой (11), где $a = V_0^2 g^{-1}$ и параметр $\operatorname{tg}\alpha$ определяется из (14).

2. Минимизация расхода топлива при полете с постоянной скоростью. Предположим, что начальная скорость V_0 удовлетворяет неравенству $A \leq V_0 \leq B$, где A удовлетворяет (16). Определим, при какой скорости расход топлива будет наименьшим при полете от точки $(0,0)$ до точки (x_0, y_0). Сначала предположим, что сопротивление среды отсутствует, т. е. $\kappa = 0$. В этом случае, используя формулу (35) из [3], получим, что начальная масса ЛА определяется по формуле.

$$m(0) = m_0\exp\left(\frac{\sqrt{g}}{2k}\int\limits_0^{x_0}\frac{f'''(t)}{(-f''(t))^{1.5}}\sqrt{1+(f'(t))^2}dt\right). \tag{17}$$

Из (11) имеем.

$$f''(x) = -\frac{1}{a\cos^2(\alpha - xa^{-1})}, \quad f'''(x) = \frac{2\sin(\alpha - xa^{-1})}{a^2\cos^3(\alpha - xa^{-1})},$$

поэтому, учитывая определение $\operatorname{tg}\alpha$ (14), получим, что функция (17) имеет вид.

$$m(0) = m_0 \exp\left(\frac{y_0\sqrt{g}}{k\sqrt{a}}\right). \tag{18}$$

Следовательно, расход топлива Q_1 при полете со скоростью V_0 при отсутствии сопротивления среды определяется формулой

$$Q_1 = m(0) - m_0 = m_0\left(\exp\left(\frac{y_0\sqrt{g}}{k\sqrt{a}}\right) - 1\right).$$

Эта формула показывает, что чем больше скорость V_0, тем меньше расход топлива при полете. Предположим теперь, что ЛА при начале движения достигает постоянной скорости V_0 (которая в дальнейшем не изменяется) за время T под действием постоянной силы F_0. Так как действующая сила постоянна, то постоянно и ускорение a^*, поэтому время разгона T начальной массы $m(0)$ определяется из соотношений

$$T = \frac{V_0}{a^*}, \qquad F_0 = m(0)a^*. \tag{19}$$

При этом, если обозначить Q_2 необходимое для разгона количество топлива такого же качества, которое используется при полете, то это количество пропорционально соответствующей мощности, т. е.

$$F_0 = k\frac{Q_2}{T}, \tag{20}$$

где k — коэффициент пропорциональности, по которому определяется $\overrightarrow{F}_R$ в (1). Из (19) и (20) определяем Q_2:

$$Q_2 = \frac{F_0 T}{k} = \frac{m(0)a^* T}{k} = m(0)\frac{V_0}{k}.$$

Итак, M — общее количество топлива, необходимое для полета ЛА с постоянной скоростью V_0, определяется равенством

$$M = Q_1 + Q_2 = m(0)\left(1 + \frac{V_0}{k}\right) - m_0. \tag{21}$$

Используя формулы (21) и (18), а также обозначение $V_0 = \sqrt{ga}$, получим функцию от a, выражающую зависимость от скорости полного расхода топлива за все время полета:

$$M = \Psi(a) = m_0\left(\left(1 + \frac{\sqrt{ga}}{k}\right)\exp\left(\frac{y_0\sqrt{g}}{k\sqrt{a}}\right) - 1\right). \tag{22}$$

Определяя наименьшее значение функции Ψ на интервале $[A^2g^{-1}, B^2g^{-1}]$, получим величину наименьшего расхода топлива, а также соответствующее значение скорости, $V = \sqrt{a_{\min}g}$. Учитывая, что

$$\Psi'(a) = \frac{m_0\sqrt{g}}{2ka\sqrt{a}} \exp\left(\frac{y_0\sqrt{g}}{k\sqrt{a}}\right)\left(a - \frac{y_0\sqrt{g}}{k}\sqrt{a} - y_0\right),$$

получаем, что точка

$$a_1 = \left(\frac{y_0\sqrt{g}}{2k} + \sqrt{\frac{y_0^2 g}{4k^2} + y_0}\right)^2 \tag{23}$$

является единственной точкой минимума функции Ψ при $a > 0$. Соответствующее значение скорости $V_1 = \sqrt{a_1 g}$. Таким образом, в этом случае получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть ЛА осуществляет полет из точки $(0,0)$ в точку (x_0, y_0) с постоянной скоростью V_0. Если сопротивление среды отсутствует и возможные значения скорости находятся в интервале $[A, B]$ (где A удовлетворяет условию (16)), то: 1) при $V_1 \in [A, B]$ наименьший расход топлива $M_{\min}$ будет при полете со скоростью $V_{\min} = V_1$ и этот расход равен $M_{\min} = \Psi(a_1)$; 2) при $V_1 \in (0, A)\bigcup(B, \infty)$ наименьший расход топлива $M_{\min}$ равен*

$$M_{\min} = \min(\Psi(A^2g^{-1}), \Psi(B^2g^{-1})),$$

при скорости V_{min}, равной A или B. Здесь Ψ — функция (22).

Теперь рассмотрим случай произвольного сопротивления среды. В этом случае формула (35) из [3] примет вид

$$m(0) = \frac{1}{k}\int\limits_0^{x_0} \psi(t)\phi(t)dt + m_0\phi(x_0),$$

где

$$\psi(x) = \kappa\sqrt{1 + (f'(x))^2}, \quad \phi(x) = \exp\left(\frac{\sqrt{g}}{2k}\int\limits_0^{x} \frac{f'''(t)}{(-f''(t))^{1.5}}\sqrt{1 + (f'(t))^2}dt\right).$$

Используя эту формулу, а также (11) и (14), получим функцию, аналогичную Ψ, выражающую зависимость M — полного расхода топлива от $a = V_0^2 g^{-1}$:

$$M = \Psi^*(a) = \left(1 + \frac{\sqrt{ga}}{k}\right)\left(\frac{\kappa}{k\cos\alpha}\int\limits_0^{x_0}\left(\cos\frac{x}{a} + \operatorname{tg}\alpha\sin\frac{x}{a}\right)^{k^{-1}\sqrt{ag}-1} dx + m_0\exp\left(\frac{y_0\sqrt{g}}{k\sqrt{a}}\right)\right) - m_0. \tag{24}$$

Определяя наименьшее значение этой функции Ψ^*_{min} на интервале $[A^2g^{-1}, B^2g^{-1}]$, получим величину наименьшего расхода топлива, а также соответствующее значение скорости V_{min}.

3. Определение траектории при полете с заданной скоростью. В заключение исследуем движение ЛА с заданной (не обязательно постоянной) скоростью. Предполагаем, что ЛА осуществляет полет от точки $(0,0)$ до точки (x_0, y_0). Скорость ЛА V — заданная положительная и непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0, x_0]$ функция.

Предположим сначала, что ЛА способен создавать силу торможения, направленную противоположно вектору скорости $\overrightarrow{V}(x)$ в каждой точке траектории полета. При этом условии траектория полета (5) определяется из уравнения (9). Решая это уравнение, получим, аналогично (10):

$$f'(x) = \operatorname{tg}(\alpha - G(x)), \quad \text{где} \;\; G(x) = \int\limits_0^x \frac{gdt}{V^2(t)}, \quad 0 \le x \le x_0. \tag{25}$$

Здесь так же, как и в (10), $\alpha = \operatorname{arctg} f'(0)$. Так как f' непрерывная функция на отрезке $[0, x_0]$, то имеем $\alpha - G(x_0) > -0.5\pi$, а так как $\alpha \in (-0.5\pi, 0.5\pi)$, получаем условие на функцию V, необходимое для осуществления полета от точки $(0,0)$ до точки (x_0, y_0):

$$G(x_0) = \int\limits_0^{x_0} \frac{gdt}{V^2(t)} < \pi. \tag{26}$$

В дальнейшем предполагаем, что это условие выполняется. Интегрируя (25) и используя условие (6), определим уравнение траектории (5):

$$f(x) = \int\limits_0^x \operatorname{tg}(\alpha - G(t))dt. \tag{27}$$

Обозначим

$$\Omega(\alpha) = \int\limits_0^{x_0} \operatorname{tg}(\alpha - G(t))dt. \tag{28}$$

Из условия (13) получаем уравнение для определения α:

$$\Omega(\alpha) = y_0 \quad \text{при} \quad -0.5\pi + G(x_0) < \alpha < 0.5\pi. \tag{29}$$

Легко видеть, что $\Omega'(\alpha) > 0$, $\Omega(-0.5\pi + G(x_0)) = -\infty$ и $\Omega(0.5\pi) = \infty$, поэтому уравнение (29) имеет единственное решение при любом y_0. Итак, получаем следующую теорему.

Теорема 4. *Задача (9), (6), (13) имеет решение тогда и только тогда, когда функция V удовлетворяет условию (26); при этом решение этой задачи единственно и определяется формулой (27), где α — решение уравнения (29).*

Предположим теперь, что при полете сила торможения отсутствует. При этом ([3]) функция (6) кроме уравнения (9) необходимо удовлетворяет условию (8). В этом случае наложим на y_0 и функцию V дополнительные условия:

$$V'(x) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq x_0; \quad G(x_0) \leq 0.5\pi; \quad y_0 \geq \int\limits_0^{x_0} \operatorname{tg} \left(\int\limits_t^{x_0} \frac{g d\tau}{V^2(\tau)} \right) dt. \tag{30}$$

Из третьего условия (30) следует неравенство $y_0 \geq \Omega(G(x_0))$, следовательно, так как Ω — возрастающая функция, решение уравнения (29) удовлетворяет неравенству

$$G(x_0) \leq \alpha < 0.5\pi. \tag{31}$$

Легко видеть, что если неравенство (31) выполняется, то условие (8) также выполнено. Таким образом, получена следующая

Теорема 5. *Если выполняются условия (31), то задача (8), (9), (6), (13) имеет единственное решение и оно определяется формулой (27), где α — решение уравнения (29).*

Замечание 1. *В случае, когда $V(x) \equiv V_0$, по доказанному в первом параграфе, условия (31) необходимы и достаточны для того, чтобы задача (8), (9), (6), (13) имела единственное решение. Поэтому эти условия в общем случае ослабить нельзя.*

Используя результаты работы [3], зная уравнение траектории (5), мы можем определить все необходимые параметры полета (масса ЛА, реактивная сила, время полета, расход топлива и др.). При этом необходимо задать массу ЛА в конечной точке полета x_0.

Государственный инженерный университет Армении

О. А. Бабаян

Оптимальное управление летательным аппаратом при полете с заданной скоростью

Исследуется движение с заданной скоростью летательного аппарата (ЛА) без крыльев под действием реактивной силы, силы сопротивления окружающей среды и силы притяжения Земли. Определены необходимые и достаточные условия для осуществления полета, возможные траектории полета, а также скорость ЛА, при которой расход топлива при полете минимален.

Հ. Ա. Բաբայան

Տրված արագությամբ թռչող սարքի օպտիմալ կառավարում

Աշխատանքում դիտարկվում է թռչող սարքի շարժումը տրված արագությամբ ռեակտիվ, միջավայրի դիմադրության եւ Երկրի ձգողության ուժերի համատեղ ազդեցության տակ: Ստացված են պայմաններ, որոնք անհրաժեշտ ու բավարար են մինչեւ տրված կետը տրված արագությամբ թռիչքի իրականացման համար, որոշված են թույլատրելի հետագծերի դասը, ինչպես նաեւ այն արագությունը, որի դեպքում վառելիքի ծախսը մինիմալն է:

H. A. Babayan

Optimal Control of an Aircraft Flying at Given Speed

We consider the motion of the aircraft at given speed under simultaneous action of reactive force, medium resistance force and gravity force. Sufficient and necessary conditions for the possibility of the flight to the given point, possible flight trajectories and the aircraft speed minimizing fuel consumption are obtained.

Литература

1. *Космодемьянский А.А.* Курс теоретической механики. Т. 2. М. Просвещение. 1966. 398 с.
2. *Бабаян О.А., Товмасян Н.Е.* - ДНАН Армении. 2008. Т. 108. N1. С. 12-19.
3. *Tovmasyan N.E.* - Topics in Analysis and its Applications. NATO Science Series, Series II. Klüwer Academic Publishers. 2004. V. 147. P. 347-364.