ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 109 2009 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517

Э. А. Даниелян, Г. П. Авагян

Об асимптотических разложениях правильно меняющихся распределений

(Представлено академиком В.С. Захаряном 19/XII 2008)

Ключевые слова: *правильно меняющиеся распределения, асимптотические разложения, лог-выпуклость*

1. Введение. Правильное изменение распределения $\{p_n\}_1^\infty$ при $n \to +\infty$ с *показателем* $(-\rho)$, $1 < \rho < +\infty$, означает существование для любого $s = 2, 3, \ldots$ предела (см. [1]) $\lim\limits_{n\to+\infty}(p_{s-n}/p_n) = s^{-\rho}$. При этом говорят, что $\{p_n\}_1^\infty$ допускает *постоянную медленно меняющуюся компоненту* (ПММК) $L \in R^+ = (0, +\infty)$, если существует предел (см. [2]) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\rho \cdot p_n = L$.

Сказанное равносильно асимптотическому разложению с *одним* членом

$$P_n = \frac{1}{n^\rho} + o(\frac{1}{n^\rho}), \ \ n \to +\infty. \tag{1}$$

Обозначим через $K(\rho, L)$, $\rho \in (1, +\infty)$, $L \in R^+$ класс распределений $\{p_n\}_1^\infty$, удовлетворяющих (1), которые *убывают* и *лог-выпуклы вниз*, т.е.

$$p_n > p_{n+1}, \ (p_n/p_{n+1}) > (p_{n+1}/p_{n+2}), \ n = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Такие распределения представляют интерес в биоинформатике (см. [3]).

Пусть $K_0(\rho, L)$ — подкласс класса $K(\rho, L)$, для которого в (1) $o(\frac{1}{n^\rho}) \equiv 0$, $n \to +\infty$.

Теорема 1. (см. [4]). *Пусть заданы числа $\rho \in (1, +\infty)$ и $L \in R^+$. Тогда класс $K_0(\rho, L)$ непуст.*

Вопрос. Существует ли распределение $\{p_n\}_1^\infty \in K(\rho, L)$, для которого справедливо асимптотическое разложение

$$p_n = \frac{L}{n^\rho} + \sum_{k=1}^{s} \frac{M_k}{n^{\rho+\alpha_k}} + o(\frac{1}{n^{\rho+\alpha_s}}), \ n \to +\infty. \tag{3}$$

Здесь заранее заданы и фиксированы следующие константы: $\rho \in (1, +\infty)$; $L \in R^+$; целое $s \geq 1$; $M_1, M_2, \ldots, M_s$ из $R^1 \setminus \{0\}$, где $R^1 = (-\infty, +\infty)$; $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_s < +\infty$.

Класс таких распределений (если существует) обозначим через $K(\rho, L; \vec{M}_s, \vec{\alpha}_s)$, где $\vec{M}_s = (M_1, M_2, \ldots, M_s)$, $\vec{\alpha}_s = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$.

Пусть $K_0(\rho, L; \vec{M}_s, \vec{\alpha}_s) \subset K(\rho, L; \vec{M}_s, \vec{\alpha}_s)$ и удовлетворяет следующему условию: в разложении 3 для распределений данного подкласса: $o(\frac{1}{n^{\rho+\alpha_s}}) \equiv 0$, $n \to +\infty$.

В настоящей работе установлено следующее утверждение:

Теорема 2. *При произвольных, заранее заданных константах $\rho \in (1, +\infty)$; $L \in R^+$; $s \geq 1$; $M_k \in R^1 \setminus \{0\}$, $k = 1, 2, \ldots, s$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_s < +\infty$ класс $K_0(\rho, L; \vec{M}_s, \vec{\alpha}_s)$ непуст.*

Выбранный метод доказательства теоремы 2 основан на свойствах лог-выпуклых вниз при $n \to +\infty$ последовательностей.

Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}_1^\infty$ образована из *положительных* членов, *убывает* и *лог-выпукла вниз* при $n \to +\infty$, если найдется индекс $n_0 > 0$ такой, что $x_n > 0$, $x_n > x_{n+1}$, $(x_n/x_{n+1}) > (x_{n+1}/x_{n+2})$ при $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$.

Рассмотрим последовательность

$$\left\{ \frac{L}{n^\rho} + \sum_{k=1}^{s} \frac{M_k}{n^{\rho+\alpha_k}} \right\}_1^\infty . \tag{4}$$

Справедлива следующая

Теорема 3. *(а) Если $M_k \in R^+$, $k = 1, 2, \ldots, s$, то последовательность (4) образована из положительных членов, убывает и лог-выпукла вниз.*

(б) При отсутствии ограничений на вышевведенные константы утверждение пункта (а) сохраняется при $n \to +\infty$.

В §2 приведены примеры разложений типа (3) для двух известных распределений.

В §3 доказан критерий лог-выпуклости вниз суммы лог-выпуклых вниз последовательностей, откуда выводится утверждение пункта (а) теоремы 3.

В §4 аналогичный критерий установлен для разности лог-выпуклых вниз последовательностей.

В §5, частично основываясь на результатах предыдущих параграфов, выводится утверждение пункта (б) теоремы 3.

В §6, используя пункт (б) теоремы 3, предлагается конструктивный метод построения распределения

$$\{p_n\}_1^\infty \in K_0(\rho, L; \vec{M}_s, \vec{\alpha}_s).$$

2. Примеры разложений. *Пример 1.* Рассмотрим $2m$-параметрическое, $m = 1, 2, \ldots$, распределение $\{p_n\}_1^\infty$ вида

$$P_n = c \cdot \prod_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} \frac{k + \hat{p}_i}{k + \hat{q}_i}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где $c = (\sum\limits_{n \geq 1} \prod\limits_{k=1}^{n} \prod\limits_{i=1}^{m} \frac{k + \hat{p}_i}{k + \hat{q}_i})^{-1}$, с параметрами $0 < \hat{p}_i < \hat{q}_i < +\infty$, $i = 1, 2, \ldots, m$, при ограничении

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} (\hat{q}_i - \hat{p}_i) > 1. \tag{6}$$

При $m = 1$ распределение $\{p_n\}_1^\infty$ переходит в известное в биоинформатике распределение Уорринга.

Распределение $\{p_n\}_1^\infty$ вида (5)-(6) *убывает* и *лог-выпукло вниз*, поскольку для него неравенства (2) сводятся к неравенствам

$$\prod_{i=1}^{m} (1 + \frac{\hat{q}_i - \hat{p}_i}{n + 1 + \hat{p}_i}) > \prod_{i=1}^{m} (1 + \frac{\hat{q}_i - \hat{p}_i}{n + 2 + \hat{p}_i}),$$

а убывание из-за $0 < \hat{p}_i < \hat{q}_i < +\infty$, вытекает, в силу (5), из неравенств

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \prod_{i=1}^{m} \frac{n + 1 + \hat{p}_i}{n + 1 + \hat{q}_i} < 1, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Обозначим

$$L = c \cdot \frac{\Gamma(\hat{q}_i + 1)}{\Gamma(\hat{p}_i + 1)} \in R^+, \quad M_1 = -\frac{1}{2} \{\rho + \sum_{i=1}^{m} (\hat{q}_i^2 - \hat{p}_i^2)\} \in (-\infty, -\frac{L\rho}{2}), \tag{7}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера, а ρ определяется форумлой (6).

В [5] доказано, что $\{p_n\}_1^\infty$ вида (5)-(6) правильно меняется при $n \to +\infty$ с показателем $(-\rho)$, допускает ПММК и разложение $p_n = \frac{L}{n^\rho} + \frac{M_1}{n^{\rho+1}} + o(\frac{1}{n^{\rho+1}})$, $n \to +\infty$, что означает $\{p_n\}_1^\infty \in K(\rho, L, M_1, 1)$ (см. (6) и (7)).

Пример 2. Рассмотрим распределение Парето (см., напр., [2])

$$p_n = \frac{c}{(n + b)^\rho}, \; 1 < \rho < +\infty, \; -1 < b < +\infty, \; n = 1, 2, \ldots, \quad \text{где } c = (\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n + b)^\rho})^{-1}. \tag{8}$$

При $n = 1, 2, \ldots$ на основе (8) осуществим разложение в ряд

$$\begin{aligned} p_n = \tfrac{c}{n^\rho}(1 + \tfrac{b}{n})^{-\rho} = \tfrac{c}{n^\rho}(1 + \sum_{m \geq 1} \tfrac{(-b)^m}{n^m})^\rho = \tfrac{c}{n^\rho}(1 + \sum_{i \geq 1} \tfrac{\rho(\rho-1)\ldots(\rho-i+1)}{i!} (\sum_{m \geq 1} \tfrac{(-b)^m}{n^m})^i) = \\ = \tfrac{c}{n^\rho}(1 + \sum_{i \geq 1} \tfrac{\rho(\rho-1)\ldots(\rho-i+1)}{i!} (-\tfrac{b}{n})^i (1 + \sum_{l \geq 1} \tfrac{(-b)^l}{n^l})^i). \end{aligned} \tag{9}$$

В (9) применена формула 1.110, с.35, [6]

$$(1 + k)^\rho = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{\rho(\rho - 1) \ldots (\rho - k + 1)}{k!} x^k, \; |x| < 1, \; \rho > 0. \tag{10}$$

Число M_k, $k = 1, 2, \ldots, s$ в разложении типа (3) для распределения (8) равно коэффициенту при $n^{-(k+\rho)}$ в разложении (9). В силу (9) M_k, $k = 1, 2, \ldots, s$, представляет собой коэффициент при n^{-k} в ряде

$$c \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{\rho(\rho-1)\ldots(\rho-i+1)}{i!}(-\frac{b}{n})^i(1+\sum_{l=1}^{k-i}\frac{(-b)^l}{n^l})^i. \qquad (11)$$

Обращаясь при $m = 2, 3, \ldots$, $a_1 > 0, \ldots, a_m > 0$ и $n = 2, 3, \ldots$ к полиномиальной формуле $(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i)^n = \sum\limits_{n_1+\ldots+n_m=n} \frac{n!}{n_1!\ldots n_m!} a_1^{n_1} \ldots a_m^{n_m}$, для $k = 1, 2, \ldots, s$ приходим к равенству $M_k = (-b)^k \cdot c \cdot (I_1 + \ldots + I_k)$, где $I_i = \rho(\rho-1)\ldots(\rho-i+1)\sum \frac{1}{\Gamma_0!\Gamma_1!\ldots\Gamma_{k-i}!}$ при $i = 1, 2, \ldots, k$.

Здесь суммируем по целочисленным векторам $\Gamma_0, \Gamma 1, \ldots, \Gamma_{k-i}$ (с неотрицательными компонентами) — решениям системы уравнений

$$\Gamma_0 + \Gamma_1 + \ldots + \Gamma_{k-i} = i, \ 1 \cdot\cdot \Gamma_1 + 2 \cdot \Gamma_2 + \cdot + (k-i)\Gamma_{k-i} = k - i.$$

Распределение $\{p_n\}_1^\infty$ типа (8) *убывает* и *лог-выпукло вниз*, так как

$$(1+\frac{1}{n+b})^\rho > (1+\frac{1}{n+1+b})^\rho, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Значит, $\{p_n\}_1^\infty \in K(\rho, c, \vec{M}_s, \vec{1}_s)$, где $M_1, M_2, \ldots, M_s$ заданы выше, а $\vec{1}_s = \underbrace{(1, 1, \ldots, 1)}_{s}$. В частности, остаточный член разложения (3) в нашем случае равен $(-\frac{bc}{n^{\rho+1}})$.

3. Сумма лог-выпуклых вниз последовательностей. Пусть последовательности с положительными членами $\{x_n\}_1^\infty$ и $\{y_n\}_1^\infty$ *убывают* и *лог-выпуклы вниз*, а последовательность $\{t_n\}_1^\infty$, где $t_n = \frac{y_n}{x_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, выпукла вниз в слабом смысле, т.е. $t_n + t_{n+2} - 2t_{n+1} \geq 0$ при всех $n = 1, 2, \ldots$.

Критерий 1. *Последовательность* $\{x_n + y_n\}_1^\infty$ *убывает и лог-выпукла вниз.*

Доказательство. При $n = 1, 2, \ldots$ обозначим $u_n = \frac{x_n}{x_{n+1}} - \frac{x_{n+1}}{x_{n+2}}$, $v_n = \frac{y_n}{y_{n+1}} - \frac{y_{n+1}}{y_{n+2}}$.

Нетрудно проверить, что лог-выпуклость вниз последовательности $\{x_n + y_n\}_1^\infty$ равносильна при $n = 1, 2, \ldots$ неравенствам

$$U_n x_{n+1} x_{n+2}\{1 + 2x_{n+1}y_{n+1}\} + v_n y_{n+1} y_{n+2} + x_n x_{n+2}\{t_n + t_{n+2} - 2t_{n+1}\} > 0. \qquad (12)$$

Так как лог-выпуклость вниз последовательностей $\{x_n\}_1^\infty$ и $\{y_n\}_1^\infty$ означает $u_n > 0$ и $v_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, соответственно, то в силу (12) из выпуклости вниз в слабом смысле последовательности $\{t_n\}_1^\infty$ следует лог-выпуклость вниз для $\{x_n + y_n\}_1^\infty$.

Убывание $\{x_n + y_n\}_1^\infty$ очевидно.

Распространим утверждение критерия 1 на случай суммы $r \geq 2$ последовательностей с положительными членами $\{x_n^{(1)}\}_1^\infty, \{x_n^{(2)}\}_1^\infty, \ldots, \{x_n^{(r)}\}_1^\infty$, которые убывают и лог-выпуклы вниз. При этом вводим следующее дополнительное условие. Обозначим $t_n^{(k)} = \frac{x_n^{(k)}}{x_n^{(k-1)}}$, $k = 2, 3, \ldots, r$, $n = 1, 2, \ldots$.

Предполагаем, что последовательности $\{t_n^{(2)}\}_1^\infty, \{t_n^{(3)}\}_1^\infty, \ldots, \{t_n^{(r)}\}_1^\infty$ убывают и лог-выпуклы вниз.

Следствие 1. *Последовательность* $\{x_n^{(1)} + x_n^{(2)} + \ldots + x_n^{(r)}\}_1^\infty$ *убывает и лог-выпукла вниз.*

Доказательство. При $k = 2, 3, \ldots, r$ и $i = k, k+1, \ldots, r$ обозначим $t_n^{(k,i)} = \frac{x_n^{(i)}}{x_n^{(k-1)}}$, $n = 1, 2, \ldots$ (тогда $t_n^{(k,k)} = t_n^{(k)}$) и рассмотрим последовательности $\{t_n^{(k,i)}\}_1^\infty$, $k = 2, 3, \ldots, r$, $i = k, k+1, \ldots, r$. Так как $t_n^{(k,i)} = t_n^{(k)} t_n^{(k+1)} \ldots t_n^{(i)}$ при $k = 2, 3, \ldots, r$ и $i = k+1, k+2, \ldots, r$, $n = 1, 2, \ldots$, то введенные последовательности убывают и лог-выпуклы вниз. Так как убывающая и лог-выпуклая вниз последовательность является выпуклой вниз (см. [7]), то $t_n^{(k,i)} + t_{n+2}^{(k,i)} - 2t_{n+1}^{(k,i)}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Перейдем непосредственно к доказательству следствия 1, которое ведем индукцией по k от $k = r-1$ до $k = 1$. Основание индукции (для $\{x_n^{(r-1)} + x_n^{(r)}\}_1^\infty$) следует из критерия 1. Пусть утверждение имеет место при $k+1, k+2, \ldots, r-1$ (для $\{x_n^{(k+1)} + x_n^{(k+2)} + \ldots + x_n^{(r)}\}_1^\infty$), докажем его при индексе k.

Положим $x_n = x_n^{(k)}$, $y_n = x_n^{(k+1)} + x_n^{(k+2)} + \ldots + x_n^{(r)}$, $n = 1, 2, \ldots$ и покажем, что справедливы неравенства (12). Согласно условиям следствия 1 $u_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, и по индукционному предположению $v_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Отсюда следует положительность первых двух слагаемых в левой части (12).

Так как $t_n = \frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{x_n^{(k)}} \sum\limits_{i=k+1}^{r} x_n^{(i)} = \sum\limits_{i=k+1}^{r} t_n^{(k+1,i)}$, $n = 1, 2, \ldots$, а последовательности $\{t_n^{(k+1,k+1)}\}_1^\infty, \{t_n^{(k+1,k+2)}\}_1^\infty, \ldots, \{t_n^{(k+1,r)}\}_1^\infty$ выпуклы вниз, то такова же и их сумма-последовательность $\{t_n\}_1^\infty$. Отсюда следует положительность третьего слагаемого в левой части (12).

Лог-выпуклость вниз последовательности $\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(r)}\}_1^\infty$ доказана. Ее убывание очевидно.

Пример 3. Пусть $\rho \in (1, +\infty)$, $L \in R^+$, $s \geq 1$ — целое число, $M_k \in R^+$, $k = 1, 2, \ldots, s$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_s < +\infty$.

Покажем, что последовательность (4) убывает и лог-выпукла вниз.

Действительно, полагаем $x_n^{(1)} = \frac{L}{n^\rho}$, $x_n^{(k+1)} = \frac{M_k}{n^{\rho+\alpha_k}}$, $k = 1, 2, \ldots, s$, $n = 1, 2, \ldots$.

Последовательности $\{x_n^{(i)}\}_1^\infty$, $i = 1, 2, \ldots, s+1$ убывают и лог-выпуклы вниз, поскольку $(1 + \frac{1}{n})^{\rho+\alpha_k} > (1 + \frac{1}{n+1})^{\rho+\alpha_k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, s$, $n = 1, 2, \ldots$ и положено $\alpha_0 = 0$ (проверено условие $(x_n^{(i)}/x_{n+1}^{(i)}) > (x_{n+1}^{(i)}/x_{n+2}^{(i)})$ для $i = 1, 2, \ldots, s+1$, $n = 1, 2, \ldots$). Наконец, $t_n^{(k)} = \frac{x_n^{(k)}}{x_n^{(k-1)}} = \frac{M_k}{M_{k-1}} \cdot \frac{1}{n^{\alpha_k}}$, $k = 1, 2, \ldots, s$, $n = 1, 2 \ldots$, где положено $M_0 = L$. Последовательности $\{t_n^{(k)}\}$ убывают и лог-выпуклы вниз. Тем самым, выполнены условия следствия 1, откуда и вытекает утверждение, и доказано утверждение пункта (a) теоремы 3.

4. Разность лог-выпуклых вниз последовательностей. Пусть последовательности с положительными членами $\{x_n\}_1^\infty$ и $\{y_n\}_1^\infty$ *убывают, лог-выпуклы вниз* и $x_n > y_n$, $n = 1, 2, \ldots$, а последовательность $\{t_n\}_1^\infty$, где $t_n = \frac{y_n}{x_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, выпукла вверх в слабом смысле, т.е. $t_n + t_{n+2} - 2t_{n+1} \le 0$ при всех $n = 1, 2, \ldots$.

Критерий 2. *Если* $x_2 \cdot y_2 \le \frac{1}{2}$, *то последовательность* $\{x_n - y_n\}_1^\infty$ *лог-выпукла вниз.*

Доказательство. Сохраним введенные при доказательстве критерия 1 обозначения для $\{u_n\}_1^\infty$ и $\{v_n\}_1^\infty$. Тогда

$$u_n > 0,\ v_n > 0,\ n = 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

Нетрудо проверить (ср. с (12)), что лог-выпуклость вниз последовательности $\{x_n - y_n\}_1^\infty$ равносильна при $n = 1, 2, \ldots$ неравенствам

$$u_n \cdot x_{n+1} \cdot x_{n+2} \cdot \{1 - 2x_{n+1}y_{n+1}\} + v_n y_{n+1} y_{n+2} - x_n x_{n+1}\{t_n + t_{n+2} - 2t_{n+1}\} > 0. \tag{14}$$

Так как $x_2 y_2 \le (1/2)$, то из-за убывания последовательностей $\{x_n\}_1^\infty$ и $\{y_n\}_1^\infty$ заключаем, что $x_n y_n < x_2 y_2 \le (1/2)$ при всех $n = 3, 4, \ldots$. Отсюда и из (13) следует положительность при $n = 2, 3, \ldots$ и неотрицательность при $n = 1$ первого слагаемого и положительность второго слагаемого левой части (14). Неотрицательность же третьего слагаемого левой части (14) вытекает из выпуклости вверх в слабом смысле последовательности $\{t_n\}_1^\infty$.

Отметим, что последовательность (4) образована из положительных членов, убывает и выпукла вниз при $n \to \infty$. Действительно, рассмотрим следующий *непрерывный аналог* последовательности (13):

$$f(t) = \frac{1}{t^p} + \sum_{k=1}^{s} \frac{M_k}{t^{\rho+\alpha k}} \ge \frac{L}{t^\rho} - \frac{1}{t^{\rho+\alpha_1}} \sum_{k=1}^{s} |M_k|,\ t \in [1, +\infty). \tag{15}$$

Для ее первых двух производных справедливы оценки

$$f'(t) \le \frac{\rho L}{t^{\rho+1}} + \frac{\rho + \alpha_s}{t^{\rho+\alpha_1+1}} \sum_{k=1}^{s} |M_k|, \tag{16}$$

$$f''(t) \ge \frac{\rho(\rho+1)L}{t^{\rho+2}} - \frac{(\rho+\alpha_s)(\rho+\alpha_s+1)}{t^{\rho+\alpha_1+2}} \sum_{k=1}^{s} |M_k|. \tag{17}$$

В (15)-(17) равенства имеют место только в случае $s = 1$, $-\infty < M_1 < 0$. При оценках использованы неравенства $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_s < +\infty$, $1 < \rho < +\infty$.

Для $\varepsilon \in (0, L)$ найдется $t_0 > 0$ такое, что при $t \ge t_0$ выполнено неравенство

$$\frac{(\rho+\alpha_s)(\rho+\alpha_s+1) \sum\limits_{k=1}^{s} |M_k|}{t^{\alpha_1}} < \varepsilon.$$

Тогда, очевидно, при $t \ge t_0$ одновременно выполнены неравенства

$$f(t) > \frac{L-\rho}{t^\rho},\ f'(t) < -\frac{\rho L - \varepsilon}{t^{\rho+1}},\ f''(t) > \frac{\rho(\rho+1)L - \varepsilon}{t^{\rho+1}},$$

откуда следует утверждение. Однако, как известно, из выпуклости вниз последовательности $\{x_n\}_1^\infty$ при $n \to +\infty$ не следует *лог-выпуклость вниз* $\{x_n\}_1^\infty$ при $n \to +\infty$.

Критерии 1 и 2 справедливы, очевидно, если как в условиях, так и в формулировках предполагать, что они имеют место лишь при $n \to +\infty$, т.е. начиная с некоторого индекса. При этом в критерии 2 условие $x_2 y_2 \le (1/2)$ можно заменить на условие $xy \le (1/2)$, где $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, $y = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

К сожалению, критерий 2 неприменим к последовательности (4) при $n \to +\infty$ в случае, когда среди констант $M_1, M_2, \ldots, M_s$ найдется хотя бы одно отрицательное число.

Пример 4. Рассмотрим последовательность $\{\frac{L}{n^\rho} + \frac{M}{n^{\rho+\alpha}}\}_1^\infty = \{\frac{L}{n^\rho} + \frac{|M|}{n^{\rho+\alpha}}\}_1^\infty$, где $L \in R^+$, $M \in (-\infty, 0)$, $1 < \rho < +\infty$, $0 < \alpha < +\infty$. Полагаем $x_n = \frac{L}{n^\rho}$, $y_n = \frac{|M|}{n^{\rho+\alpha}}$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $t_n = (y_n/x_n) = \frac{L}{|M|} \cdot \frac{1}{n^\alpha}$, $n = 1, 2, \ldots$. Последовательность $\{t_n\}_1^\infty$ в данном случае лог-выпукла вниз, поскольку $(1 + \frac{1}{n})^\alpha > (1 + \frac{1}{n+1})^\alpha$ при всех $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно, $\{t_n\}_1^\infty$ выпукла вниз и условия критерия 2 не выполнены. Таким образом, последовательность (4) следует изучить отдельно при $n \to +\infty$ в случае, когда среди констант $M_1, M_2, \ldots, M_s$ есть отрицательные числа. Этому посвящен следующий параграф.

Напоследок отметим, что критерий 2 представляет самостоятельный интерес.

5. Лог-выпуклость вниз последовательности (4) при $n \to +\infty$**.** Согласно §4, последовательность $\{x_n + y_n\}_1^\infty$, где $x_n = \frac{L}{n^\rho}$, $y_n = \sum\limits_{k=1}^{s} \frac{M_k}{n^{\rho+\alpha_k}}$, $n = 1, 2, \ldots$, *положительна, убывает* и *выпукла вниз* при $n \to +\infty$.

Докажем теорему 3 (б), т.е. лог-выпуклость вниз при $n \to +\infty$ для $\{x_n + y_n\}_1^\infty$. Следует доказать неравенство (12) (ср. с. 15) при $n \to +\infty$, т.е. начиная с некоторого индекса. При этом $t_n = L^{-1} \cdot \sum\limits_{k=1}^{s} \frac{M_k}{n^{\alpha_k}}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Обозначим k-е, $k = 1, 2, 3$, слагаемое левой части (12) через $T_k(n)$ и изучим его асимптотическое поведение при $n \to +\infty$.

Вначале вернемся к разложению (10) при $\alpha \in R^+$, $0 < x < 1$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + x^2 \varphi_\alpha(x), \tag{18}$$

где

$$\varphi_\alpha(x) = \sum_{k\ge2} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^{k-2}. \tag{19}$$

Если α — целое, то ряд (19) есть конечная сумма. Если α — не целое, то начиная с индекса $k_0 = \min\{k : \alpha - k + 1 < 0\} \ge 2$ при $\alpha \in R^+$, ряд (19) является сходящимся, знакопеременным с убывающими по абсолютной величине членами. Во всех случаях существует предел

$$\lim_{x\downarrow0} \varphi_\alpha(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}. \tag{20}$$

Теперь, $T_1(n)=\frac{L^2}{(n+1)^\rho(n+2)^\rho}\{1+2x_{n+1}y_{n+1}\}\{(1+\frac{1}{n})^\rho-(1+\frac{1}{n+1})^\rho\}=\frac{L^2}{(n+1)^\rho(n+2)^\rho}\{1+2x_{n+1}y_{n+1}\}\{(1+\frac{\rho}{n}+\frac{\varphi_\rho(1/n)}{n^2})-(1+\frac{\rho}{n+1}+\frac{\varphi_\rho(1/(n+1))}{(n+1)^2})\}$, т.е.

$$\lim_{n\to+\infty} n^{2\rho+2}T_1(n)=\lim_{n\to+\infty}\{\varphi_\rho(1/n)-\varphi_\rho(1/(n+1))+\rho\}\cdot L^2=\rho\cdot L^2, \tag{21}$$

где использованы (18)-(20).

Далее, $T_2(n)=y_ny_{n+2}-y_{n+1}^2=(\sum_{k=1}^{s}\frac{M_k}{n^{\rho+\alpha k}})(\sum_{k=1}^{s}\frac{M_k}{(n+2)^{\rho+\alpha k}})-(\sum_{k=1}^{s}\frac{M_k}{(n+1)^{\rho+\alpha k}})^2=\sum_{1\le i\le j\le s}^{s}M_iM_j\{\frac{1}{n^{\rho+\alpha_i}(n+2)^{\rho+\alpha_j}}+\frac{1}{n^{\rho+\alpha_j}(n+2)^{\rho+\alpha_i}}-\frac{2}{(n+1)^{2\rho+\alpha_i+\alpha_j}}\}=\sum_{1\le i\le j\le s}^{s}\frac{M_iM_j}{(n+1)^{\rho+\alpha_i}(n+2)^{\rho+\alpha_j}}\{(1+\frac{1}{n})^{\rho+\alpha_i}\cdot(1+(1+\frac{2}{n})^{\alpha_j-\alpha_i})-2(1+\frac{1}{n+1})^{\rho+\alpha_j}\}=\sum_{1\le i\le j\le s}^{s}\frac{M_iM_j}{(n+1)^{\rho+\alpha_i}(n+2)^{\rho+\alpha_j}}\{(1+\frac{\rho+\alpha_i}{n}+\frac{\varphi_{\rho+\alpha_i}(1/n)}{n^2})(2+\frac{2(\alpha_j-\alpha_i)}{n}+\frac{4\varphi_{\alpha_j-\alpha_i}(2/n)}{n^2})-2(1+\frac{\rho+\alpha_i}{n+1}+\frac{\varphi_{\rho+\alpha_j}(1/(n+1))}{(n+1)2})\}$, т.е. $\lim_{n\to+\infty} n^{2\rho+2+2\alpha_1}T_2(n)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{1\le i\le j\le s}^{s}\frac{M_iM_j}{n^{-2\alpha_1+\alpha_i+\alpha_j}}\cdot$

$$\begin{aligned}&\{2\varphi_{\rho+\alpha_i}(\tfrac{1}{n})+4\varphi_{\alpha_j+\alpha_i}(\tfrac{2}{n})-2\varphi_{\rho+\alpha_j}(\tfrac{1}{n+1})+2(\rho+\alpha_i)(\alpha_j-\alpha_i)+2(\rho+\alpha_j)\}=\\&=\lim_{n\to+\infty}M_1^2\cdot\{2\varphi_{\rho+\alpha_1}(\tfrac{1}{n})-2\varphi_{\rho+\alpha_1}(\tfrac{1}{n+1})+2(\rho+\alpha_1)\}=2\cdot M_1^2(\rho+\alpha_1),\end{aligned} \tag{22}$$

где использованы (18)-(20) и неравенства $0<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_s$. Наконец, $T_3(n)=\dfrac{L}{n^\rho(n+2)^\rho}\sum_{k=1}^{s}M_k\{\dfrac{1}{n^{\alpha_k}}+\dfrac{1}{(n+2)^{\alpha_k}}-\dfrac{2}{(n+1)^{\alpha_k}}\}=\dfrac{L}{n^\rho(n+2)^\rho}\sum_{k=1}^{s}\dfrac{M_k}{(n+2)^{\alpha_k}}\{1+(1+\dfrac{2}{n})^{\alpha_k}-2(1+\dfrac{1}{n+1})^{\alpha_k}\}=\dfrac{L}{n^\rho(n+2)^\rho}\sum_{k=1}^{s}\dfrac{M_k}{(n+2)^{\alpha_k}}\{1+(1+\dfrac{2\alpha_k}{n}+\dfrac{4\varphi_{\alpha_k}(2/n)}{n^2})-2(1+\dfrac{\alpha_k}{n+1}+\dfrac{\varphi_{\alpha_k}(1/(n+1))}{(n+1)^2})\}=\dfrac{L}{n^\rho(n+2)^\rho}\sum_{k=1}^{s}\dfrac{M_k}{(n+2)^{\alpha_k}}\{\dfrac{2\alpha_k}{n^2}+\dfrac{4\varphi_{\alpha_k}(2/n)}{n^2}-\dfrac{2\varphi_{\alpha_k}(1/(n+1))}{(n+1)^2}\}$,

т.е. $\lim_{n\to+\infty} n^{2\rho+2+2\alpha_1}T_3(n)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{s}\dfrac{LM_kn^2}{n^{-\alpha_1+\alpha_k}}\{\dfrac{2\alpha_k}{n^2}+\dfrac{4\varphi_{\alpha_k}(2/n)}{n^2}-\dfrac{2\varphi_{\alpha_k}(1/(n+1))}{(n+1)^2}\}=$

$$=L\cdot M_1\lim_{n\to+\infty}\{2\alpha_1+4\varphi_{\alpha_1}(\frac{2}{n})-2\varphi_{\alpha_1}(\frac{1}{n+1})\}=2L\cdot M_1\cdot\alpha_1(\alpha_1+1). \tag{23}$$

Собирая воедино (21)-(23), заключаем, что существует предел

$$\lim_{n\to+\infty} n^{2\rho+2}(T_1(n)+T_2(n)+T_3(n))=\rho\cdot L^2.$$

Следовательно, для $\varepsilon\in(0,1)$ найдется индекс $n_0>0$ такой, что при всех $n=n_0,n_0+1,\ldots$ справедливы неравенства $T_1(n)+T_2(n)+T_3(n)>\rho\cdot L^2(1-\varepsilon)/n^{2\rho+2}>0$.

Тем самым, установлены неравенства (12) при $n\to+\infty$, что доказывает лог-выпуклость вниз $\{x_n+y_n\}_1^\infty$, т.е. последовательности (4). Теорема 3 доказана.

6. Доказательство теоремы 2. В настоящем параграфе докажем основной результат работы — теорему 2. Конструктивный метод доказательства заимствован из работы [4].

Проведем касательную к кривой $y = f(t)$, где $f(t)$, $t \in [1, +\infty)$ определено равенством (15) в целой точке $n_0 > 0$. Выбор числа n_0 осуществим позже. Напомним, что функция $f(t)$, $t \in [1, +\infty)$ представляет собой *непрерывный аналог* последовательности (4).

Так как $f'(t) = -\frac{\rho L}{t^{\rho+1}} + \sum\limits_{k=1}^{s} \frac{(\rho+\alpha_k)M_k}{t^{\rho+\alpha_k+1}}$, и для касательной $y = at + b$ к кривой $y = f(t)$ в точке $t = n_0$ имеем $y(n_0) = f(n_0)$, $a = f'(n_0)$, то

$$b = f(n_0) - n_0 f'(n_0) = \frac{1}{n_0^\rho}\{(\rho+1)L + \sum_{k=1}^{s} \frac{(\rho+\alpha_k+1)M_k}{n_0^{\alpha_k}}\} \text{ и}$$

$$y(t) = \frac{t}{n_0^{\rho+1}}\{-\rho L - \sum_{k=1}^{s} \frac{(\rho+\alpha_k)M_k}{n_0^{\alpha_k}} + \{(\rho+1)L + \sum_{k=1}^{s} \frac{(\rho+\alpha_k+1)M_k}{n_0^{\alpha_k}}\}\frac{1}{n_0^\rho}. \quad (24)$$

На основе (24) подсчитываем конечную сумму

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_0} y(k) = L \cdot n_0^{-\rho} \cdot \sum_{k=1}^{n_0}\{-\tfrac{\rho \cdot k}{n_0} + (\rho+1)\} + \{\sum_{i=1}^{s} \tfrac{M_i}{n_0^{\alpha_i}} \cdot \tfrac{1}{n_0^\rho} \sum_{k=1}^{n_0}\{-\tfrac{(\rho+\alpha_i)\cdot k}{n_0} + \\ + (\rho+\alpha_i+1)\}\} = \tfrac{1}{n_0^{\rho-1}}\{\tfrac{\rho}{2} + 1 - \tfrac{\rho}{2n_0}\} + \sum_{i=1}^{s} \tfrac{1}{n_0^{\rho+\alpha_i-1}}\{\tfrac{\rho+\alpha_i}{2} + 1 - \tfrac{\rho+\alpha_i}{2n_0}\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Тогда, обозначив через q_n, $n = 1, 2, \ldots$, n-й член последовательности (4), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_0} y(k) + \sum_{n>n_0} q_n = \tfrac{1}{n_0^{\rho-1}}\{\tfrac{\rho}{2} + 1 - \tfrac{\rho}{2n_0}\} + \sum_{i=1}^{s} \tfrac{1}{n_0^{\rho+\alpha_i-1}}\{\tfrac{(\rho+\alpha_i)}{2} + 1 - \tfrac{\rho+\alpha_i}{2n_0}\}\} + \\ + \sum_{n>n_0}\{\tfrac{L}{n^\rho} + \sum_{i=1}^{s} \tfrac{M_i}{n^{\rho+\alpha_i}}\} \overset{def}{=} T_{n_0}, \end{aligned} \quad (26)$$

где использовано (25). Так как $\rho \in (1, +\infty)$, то, выбрав n_0 достаточно большим, можно добиться неравенства

$$T_{n_0} < 1. \quad (27)$$

Пусть $\{e_n\}_1^{n_0}$ — убывающая последовательность неотрицательных чисел с $e_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n, n_0 - 1$, $e_{n_0} = 0$, для которой $\{loge_n\}_1^{n_0}$ выпукла вниз и

$$\sum_{k=1}^{n_0} e_k = 1 - T_{n_0}, \quad (28)$$

где T_{n_0} задано равенством (26). Пример такой последовательности приведен в [4].

Распределение $\{p_n\}_1^{n_0}$, удовлетворяющее теореме 2, строится следующим образом:

$$P_k = \begin{cases} y_k + e_k, & \text{при} \quad k = 1, 2, \ldots, n_0, \\ q_k, & \text{при} \quad k > n_0. \end{cases} \quad (29)$$

Ясно, что последовательность $\{p_n\}_1^\infty$, определяемая равенствами (29), есть распределение. Действительно, в силу (26)-(28) $\sum\limits_{k\geq 1} p_k = \sum\limits_{k=1}^{n_0}(y(k)+e_k) + \sum\limits_{n>n_0} q_n = 1$.

Распределение $\{p_n\}_1^\infty$ вида (29) правильно меняется при $n \to +\infty$ с показателем $(-\rho)$ и допускает ПММК, поскольку $p_n \approx q_n = Ln^{-\rho}$, $n \to +\infty$, из-за (29) (пишем $x_n \approx y_n$, $n \to +\infty$, если $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n/y_n) = 1$).

Наконец, для последовательности $\{y(k)+e_k\}_{k=1}^{n_0}$ индуцированная последовательность $\{\log y(k)+e_k\}_{k=1}^{n_0}$ выбором достаточно большого индекса n_0-точки, в которой проведена касательная к кривой $y = f(t)$, может быть сделана выпуклой вниз.

Действительно, согласно (24) при достаточно большом n_0 число c, где $0 < c \overset{def}{=} y(k) - y(k+1)$, $k = 1, 2, \ldots, n_0 - 1$ ($y(t)$ линейна), может быть сделано сколь угодно малым. Следовательно, выбором n_0 можно добиться выполнения неравенств

$$2c \cdot e_k + e_{k+2} > 2c \cdot e_{k+1},\ k = 1, 2, \ldots, n_0 - 1. \tag{30}$$

Выберем n_0 настолько большим, чтобы выполнялись неравенства (27), (30) и зафиксируем n_0. Используя (30), докажем, что справедливы неравенства

$$y(k)e_{k+2} + y(k+2)e_k > 2y(k+1)e_{k+1},\ k = 1, 2, \ldots, n_0 - 1. \tag{31}$$

Так как $y(k+1) = y(k) + c$, $y(k+2) = y(k) + 2c$, то (31) записывается в виде

$$y(k)(e_{k+2} + e_k - 2e_{k+1}) + 2c(e_k - e_{k+1}) > 0,\ k = 1, 2, \ldots, n_0 - 1. \tag{32}$$

Так как последовательность $\{\log e_k\}_1^{n_0}$ выпукла вниз, то в силу [7] такова же и последовательность $\{e_k\}_1^{n_0}$, откуда следует положительность первого слагаемого в левой части (32). Теперь, (32) вытекает из-за убывания $\{e_k\}_1^{n_0}$. Итак, (31) доказано.

Лог-выпуклость вниз последовательностей $\{y(k)\}_1^{n_0}$ и $\{e_k\}_1^{n_0}$ означает выполнение неравенств $y(k)y(k+2) > (y(k+1))^2$, $e_k e_{k+2} > (e_{k+1})^2$, $k = 1, 2, \ldots, n_0 - 1$, которые при сложении с (31) дают при $k = 1, 2, \ldots, n_0 - 1$

$$y(k)y(k+2) + y(k)e_{k+2} + y(k+2)e_k + e_k e_{k+2} > (y(k+1))^2 2y(k+1)e_{k+1} + e^2_{k+1.}$$

Последние неравенства преобразуются к виду $\frac{y(k)+e_k}{y(k+1)+e_{k+1}} > \frac{y(k+1)+e_{k+1}}{y(k+2)+e_{k+2}}$, $k = 1, 2, \ldots, n_0$, что доказывает утверждение для этих индексов.

Возвращаясь к (29), убеждаемся, что $\{log\ p_k\}_1^\infty$ выпукла вниз, поскольку для индексов $n_0, n_0+1, \ldots$ утверждение очевидно. Теорема 2 доказана.

Ереванский государственный университет

Э. А. Даниелян, Г. П. Авагян

Об асимптотических разложениях правильно меняющихся распределений

Основной результат настоящей работы заключается в следующем. Пусть заданы числа $\rho \in (1, +\infty)$; $L \in R^+ = (0, +\infty)$; $s = 1, 2, \ldots$; $M_1, M_1, \ldots, M_s \in R^1 \setminus \{0\}$, где $R^1 = (-\infty, +\infty)$; $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_s < +\infty$. Тогда существует лог-выпуклое вниз распределение $\{p_n\}_1^\infty$, допускающее асимтотическое разложение $p_n = \frac{L}{n^\rho} + \sum\limits_{k=1}^{s} \frac{M_k}{n^{\rho+\alpha_k}} + o(\frac{1}{n^{\rho+\alpha_s}})$, $n \to +\infty$.

Է. Ա. Դանիելյան, Գ. Պ. Ավագյան

Կանոնավոր փոփոխվող բաշխումների ասիմպտոտիկ վերլուծությունների մասին

Աշխատանքի հիմնական արդյունքը հետեւյալն է: Դիցուք՝ $\rho \in (1, +\infty)$; $L \in R^+ = (0, +\infty)$; $s = 1, 2, \ldots$; $M_1, M_1, \ldots, M_s \in R^1 \setminus \{0\}$, ուր $R^1 = (-\infty, +\infty)$; $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_s < +\infty$-ը՝ նախապես տրված թվեր են: Գոյություն ունի բաշխում $\{p_n\}_1^\infty$, որի համար տեղի ունի $p_n = \frac{L}{n^\rho} + \sum\limits_{k=1}^{s} \frac{M_k}{n^{\rho+\alpha_k}} + o(\frac{1}{n^{\rho+\alpha_s}})$, $n \to +\infty$ ասիմպտոտիկ վերլուծությունը, եւ $\{p_n\}_1^\infty$-ը լոգ-ուռուցիկ է դեպի ներքեւ:

E. A. Danielian, G. P. Avagyan

On Asymptotic Expansions of Regularly Varying Distributions

The main result of the present paper consists in following. Let: $\rho \in (1, +\infty)$; $L \in R^+ = (0, +\infty)$; $s = 1, 2, \ldots$; $M_1, M_1, \ldots, M_s \in R^1 \setminus \{0\}$ with $R^1 = (-\infty, +\infty)$; $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_s < +\infty$ be given numbers. Then there is a distribution $\{p_n\}_1^\infty$, which exhibits the asymptotic expansion $p_n = \frac{L}{n^\rho} + \sum\limits_{k=1}^{s} \frac{M_k}{n^{\rho+\alpha_k}} + o(\frac{1}{n^{\rho+\alpha_s}})$, $n \to +\infty$, and is log-downward convex.

Литература

1. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М. Наука. 1985.

2. *Astola F., Danielian E.* Frequency Distributions in Biomolecular Systems and Growing Networks. Tampere: TICSP Series N31. 2006.

3. *Аракелян А.Г.* Устойчивость частотных распределений в биомолекулярных моделях. Канд. дис. ЕГУ. 2007.

4. *Avagyan G.P.* - Proceedings of YSU. 2009. N1.

5. *Арутюнян. Г.С., Яковлев С.П.* - Математика в высшей школе. 2008. Т. 4. N2,3.

6. *Рыжик И.М., Градштейн И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. Л. ГИТТЛ. 1951.

7. *Яковлев С.П.* - Доклады НАН РА. Т. 108. N4. С. 293-301.