ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 108 2008 № 4

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек

(Представлено 24/VII 2008)

Ключевые слова: *микрополярная теория, упругая тонкая оболочка, общая двумерная теория*

Для решения задач микро- и наномеханики [1] весьма актуально построение общих теорий пластин и оболочек на основе несимметричной (микрополярной, моментной) теории упругости [2]. Асимптотический метод позволяет из трехмерной несимметричной теории упругости построить вполне адекватную общую прикладную-двумерную теорию тонких микрополярных оболочек. В работах [3-5] построены теории микрополярных оболочек со свободным вращением и со стесненным вращением. В работе [6] показано, что в зависимости от значений безразмерных физических параметров микрополярных пластин возможно построение теорий микрополярных пластин со свободным вращением; со стесненным вращением; "с малой сдвиговой жесткостью".

В данной работе построены общие теории микрополярных оболочек со свободным вращением; со стесненным вращением; "с малой сдвиговой жесткостью" в зависимости от безразмерных физических параметров материала оболочки.

1. Постановка задачи. Будем рассматривать оболочку толщиной $2h$ как трехмерное упругое тело. Основными уравнениями определения напряженно-деформированного состояния (НДС) микрополярного упругого тела являются [7]:

уравнения равновесия:

$$\nabla_m \sigma^{mn} = 0,\ \nabla_m \mu^{mn} + e^{nmk} = 0; \qquad (1.1)$$

физические соотношения:

$$\begin{cases} \sigma_{mn} = (\mu+\alpha)\gamma_{mn} + (\mu-\alpha)\gamma_{mn} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{nm}, \\ \mu_{mn} = (\gamma+\varepsilon)\kappa_{mn} + (\gamma-\varepsilon)\kappa_{nm} + \beta\kappa_{kk}\delta_{nm}; \end{cases} \tag{1.2}$$

геометрические соотношения:

$$\gamma_{mn} = \nabla_m V_n - e_{kmn} w^k, \ \kappa_{mn} = \nabla_m w_n. \tag{1.3}$$

Здесь σ^{nm}, μ^{nm} — контравариантные, а σ_{nm}, μ_{nm} — ковариантные компоненты тензоров силовых и моментных напряжений; γ_{mn}, κ_{mn} — ковариантные компоненты тензоров деформаций и изгиба-кручения; V_n, w_n — ковариантные компоненты векторов перемещения и независимого поворота; $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ — физические константы для микрополярного тела оболочки. Индексы m, n, k принимают значения 1, 2, 3.

Примем обычную триортогональную систему координат α_n для изучения оболочек [8]. Для физических компонент рассматриваемых тензоров и векторов отставим принятые выше обозначения.

Пусть на лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3 = \pm h$ заданы соответствующие компоненты силового и моментного тензоров напряжений. На поверхности края оболочки Σ примем один из вариантов граничных условий несимметричной теории упругости (в дальнейшем для определенности принимаются граничные условия первого варианта несимметричной теории упругости).

2. Преобразование трехмерных уравнений микрополярной теории упругости. Для удобства введем несимметричный тензор силовых напряжений [8] и аналогичный тензор для моментных напряжений [3]:

$$\begin{gathered} \tau_{ii} = \left(1+\tfrac{\alpha_3}{R_j}\right)\sigma_{ii}, \ \tau_{ij} = \left(1+\tfrac{\alpha_3}{R_j}\right)\sigma_{ij}, \\ \tau_{i3} = \left(1+\tfrac{\alpha_3}{R_j}\right)\sigma_{i3}(i\leftrightarrow 3), \ \tau_{33} = \left(1+\tfrac{\alpha_3}{R_1}\right)\left(1+\tfrac{\alpha_3}{R_2}\right)\sigma_{33}, \\ \nu_{ii} = \left(1+\tfrac{\alpha_3}{R_j}\right)\mu_{ii}, \ \nu_{ij} = \left(1+\tfrac{\alpha_3}{R_j}\right)\mu_{ij}, \\ \nu_{i3} = \left(1+\tfrac{\alpha_3}{R_j}\right)\mu_{i3}(i\leftrightarrow 3), \ \nu_{33} = \left(1+\tfrac{\alpha_3}{R_1}\right)\left(1+\tfrac{\alpha_3}{R_2}\right)\mu_{33}. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь и в дальнейшем индексы i, j принимают значения 1, 2, притом $i \neq j$.

В обозначениях (2.1) основная система микрополярного упругого тела принимает вид [3]:

уравнения равновесия:

$$L_i + \frac{\tau_{i3}+\tau_{3i}}{R_i} + \left(1+\frac{\alpha_3}{R_i}\right)\frac{\partial\tau_{3i}}{\partial\alpha_3} = 0,$$

$$
\begin{aligned}
&K_i + \frac{\nu_{i3}+\nu_{3i}}{R_i} + \left(1+\frac{\alpha_3}{R_i}\right)\frac{\partial \nu_{3i}}{\partial \alpha_3} - (-1)^j\left(\tau_{3j}-\tau_{j3}\right) = 0,\\
&-L + F + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial \alpha_3} = 0,\\
&-K + \Phi + \frac{\partial \nu_{33}}{\partial \alpha_3} + \left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\tau_{12} - \left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\tau_{21} = 0;
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

физико-геометрические соотношения:

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\tfrac{a_3}{R_j}\right)e_i = \tfrac{1}{E}\left(1+\tfrac{a_3}{R_i}\right)\tau_{ii} - \tfrac{\nu}{E}\left(1+\tfrac{a_3}{R_j}\right)\tau_{jj} - \tfrac{\nu}{E}\tau_{33};\\
&\left(1+\tfrac{a_3}{R_1}\right)\left(1+\tfrac{a_3}{R_2}\right)\tfrac{\partial V_3}{\partial a_3} = \tfrac{1}{E}\tau_{33} - \tfrac{\nu}{E}\left(1+\tfrac{a_3}{R_1}\right)\tau_{11} - \tfrac{\nu}{E}\left(1+\tfrac{a_3}{R_2}\right)\tau_{22};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\tfrac{a_3}{R_j}\right)t_j - (-1)^j\left(1+\tfrac{a_3}{R_i}\right)\left(1+\tfrac{a_3}{R_j}\right)w_3 = \tfrac{\mu+\alpha}{4\mu a}\left(1+\tfrac{a_3}{R_i}\right)\tau_{ij} - \tfrac{\mu-\alpha}{4\mu a}\left(1+\tfrac{a_3}{R_j}\right)\tau_{ji};\\
&\left(1+\tfrac{a_3}{R_j}\right)\tfrac{\partial V_i}{\partial a_3} - (-1)^j\left(1+\tfrac{a_3}{R_j}\right)w_j = \tfrac{\mu+\alpha}{4\mu a}\tau_{3i} - \tfrac{\mu-\alpha}{4\mu a}\tau_{i3};\\
&\left(1+\tfrac{a_3}{R_j}\right)g_i + (-1)^j\left(1+\tfrac{a_3}{R_i}\right)\left(1+\tfrac{a_3}{R_j}\right)w_j = \tfrac{\mu+\alpha}{4\mu a}\left(1+\tfrac{a_3}{R_i}\right)\tau_{i3} - \tfrac{\mu-\alpha}{4\mu a}\left(1+\tfrac{a_3}{R_j}\right)\tau_{3i};
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\tfrac{a_3}{R_j}\right)\kappa_i = \tfrac{\beta+\gamma}{\gamma(3\beta+2\gamma)}\left(1+\tfrac{a_3}{R_i}\right)\nu_{ii} - \tfrac{\beta}{2\gamma(3\beta+2\gamma)}\left(1+\tfrac{a_3}{R_j}\right)\nu_{jj} - \tfrac{\beta}{2\gamma(3\beta+2\gamma)}\nu_{33};\\
&\left(1+\tfrac{a_3}{R_1}\right)\left(1+\tfrac{a_3}{R_2}\right)\tfrac{\partial w_3}{\partial a_3} = \tfrac{\beta+\gamma}{\gamma(3\beta+2\gamma)}\nu_{33} - \tfrac{\beta}{2\gamma(3\beta+2\gamma)}\left(1+\tfrac{a_3}{R_1}\right)\nu_{11} - \tfrac{\beta}{2\gamma(3\beta+2\gamma)}\left(1+\tfrac{a_3}{R_2}\right)\nu_{22};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\tfrac{a_3}{R_j}\right)n_j = \tfrac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\left(1+\tfrac{a_3}{R_i}\right)\nu_{ij} - \tfrac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}(1+\tfrac{\alpha_3}{R_j})\nu_{ji},\\
&\left(1+\tfrac{a_3}{R_j}\right)\tfrac{\partial w_i}{\partial a_3} = \tfrac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\nu_{3i} - \tfrac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}(1+\tfrac{\alpha_3}{R_j})\nu_{i3};\\
&\left(1+\tfrac{a_3}{R_i}\right)\theta_i = \tfrac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\left(1+\tfrac{a_3}{R_i}\right)\nu_{i3} - \tfrac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\left(1+\tfrac{a_3}{R_i}\right)\nu_{3i}.
\end{aligned}
$$

Граничные условия на лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3 = \pm h$ будут выражаться так:

$$
\begin{aligned}
&\left[\tfrac{\tau_{3i}}{1+a_3/R_j}\right]_{a_3=\pm h} = \mp q_i^{\pm},\ \left[\tfrac{\tau_{33}}{(1+a_3/R_1)(1+a_3/R_2)}\right]_{a_3=\pm h} = \mp q_3^{\pm},\\
&\left[\tfrac{\nu_{3i}}{1+a_3/R_j}\right]_{a_3=\pm h} = \mp m_i^{\pm},\ \left[\tfrac{\nu_{33}}{(1+a_3/R_1)(1+a_3/R_2)}\right]_{a_3=\pm h} = \mp m_3^{\pm},
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$
L_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \tau_{ii}}{\partial a_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial a_i}(\tau_{ii}-\tau_{jj}) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial a_j} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial a_j}(\tau_{ji}+\tau_{ij});
$$

$$
L = \frac{\tau_{11}}{R_1} + \frac{\tau_{22}}{R_2},\ F = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \tau_{13}}{\partial a_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial a_1}\tau_{13} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial \tau_{23}}{\partial a_2} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial a_2}\tau_{23};
$$

$$
K_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \nu_{ii}}{\partial a_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial a_i}(\nu_{ii}-\nu_{jj}) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial \nu_{ji}}{\partial a_j} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial a_j}(\nu_{ji}+\nu_{ij});
$$

$$
K = \frac{\nu_{11}}{R_1} + \frac{\nu_{22}}{R_2},\ \Phi = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \nu_{13}}{\partial a_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial a_1}\nu_{13} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial \nu_{23}}{\partial a_2} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial a_2}\nu_{23}
\tag{2.5}
$$

$$
e_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial V_i}{\partial a_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_2}{\partial a_j}V_j + \frac{V_3}{R_i},\ t_i = \frac{1}{A_j}\frac{\partial V_i}{\partial a_j} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial a_i}V_j,\ g_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial V_3}{\partial a_i} - \frac{V_i}{R_i};
$$

$$\kappa_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial w_i}{\partial a_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial a_j}w_j + \frac{w_3}{R_i},\ n_i = \frac{1}{A_j}\frac{\partial w_i}{\partial a_j} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial a_i}w_j,\ \theta_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial w_3}{\partial a_i} - \frac{w_i}{R_i}.$$

3. Асимптотический метод. Предполагается, что толщина оболочки мала по сравнению с характерными радиусами кривизны срединной поверхности оболочки; будем исходить из следующей основной концепции [8-10]: в статическом случае общее НДС тонкого трехмерного тела, образующего оболочку, состоит из внутреннего НДС, охватывающего всю оболочку, и погранслоев, локализующихся вблизи поверхности края оболочки Σ. При определении как внутреннего, так и краевого НДС, оболочки большую роль играют значения физических констант микрополярного материала оболочки. С этой точки зрения введем следующие безразмерные физические параметры:

$$\frac{\alpha}{\mu},\ \frac{\beta}{R^2\mu},\ \frac{\gamma}{R^2\mu},\ \frac{\varepsilon}{R^2\mu}, \tag{3.1}$$

где R — некоторый характерный радиус кривизны срединной поверхности оболочки.

Для построения внутренней задачи введем новые независимые переменные, положив [8]

$$\alpha_i = R\lambda^{-p}\xi_i,\ \alpha_3 = R\lambda^{-l}\zeta. \tag{3.2}$$

Здесь p, l — целые числа, удовлетворяющие неравенствам $l > p \geq 0$; λ — большой постоянный безразмерный геометрический параметр, определямый формулой $h = R\lambda^{-l}$. Согласно асимптотическому методу наша цель при построении внутренней задачи будет заключаться в том, чтобы приближенно свести трехмерные (с независимыми переменными ξ_1, ξ_2, ζ) уравнения микрополярной теории упругости к двумерным уравнениям (с независимыми переменными ξ_1 и ξ_2).

Обращаясь к изучению краевых микрополярных упругих явлений, будем снова отправляться от уравнений трехмерной несимметричной теории упругости (2.2)-(2.3). Будем считать, что поверхность края оболочки Σ, вблизи которого надо исследовать напряженное состояние, задается уравнением $\alpha_1 = \alpha_{10}$, и введем замену независимых переменных по формулам [8]:

$$\alpha_1 - \alpha_{10} = R\lambda^{-l}\xi_1,\ \alpha_2 = R\lambda^{-p}\xi_2,\ \alpha_3 = R\lambda^{-l}\zeta, \tag{3.3}$$

где величины R, λ, l, p имеют тот же смысл, что и при изучении внутренней задачи. Будем требовать, чтобы решение погранслойной задачи при удалении от торца $\alpha_1 = \alpha_{10}$ в глубь трехмерной оболочки имело затухающий характер, и всякий раз получать условия существования такого решения.

После построения асимптотических приближений внутренней задачи и задачи пограничного слоя общее НДС в микрополярной оболочке определяется суммой двух указанных задач. Определяя общее НДС в оболочке, можем удовлетворять трехмерным граничным условиям на поверхности края оболочки $\alpha_1 = \alpha_{10}$. Далее, используя условия затухания погранслойного решения, получим отдельные граничные условия на граничном контуре Г срединной поверхности оболочки для внутренней(двумерной) задачи и граничные условия на поверхности края оболочки $\alpha_1 = \alpha_{10}$ для отдельных составляющих погранслойной задачи.

4. Прикладная-двумерная теория микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений. Будем предполагать, что безразмерные физические параметры (3.1) имеют значения:

$$\frac{\alpha}{\mu} \sim 1, \ \frac{\beta}{R^2\mu} \sim 1, \ \frac{\gamma}{R^2\mu} \sim 1, \ \frac{\varepsilon}{R^2\mu} \sim 1. \tag{4.1}$$

На уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-l})$ для величин внутренней задачи в трехмерной области оболочки получим соответствующие асимптотические представления, из которых вытекают следующие качественные результаты: компоненты векторов перемещения и независимого поворота — линейные функции от координаты α_3; силовые и моментные напряжения $\sigma_{ii}, \ \sigma_{ij}, \ \sigma_{i3}, \ \sigma_{3i}, \mu_{ii}, \ \mu_{ij}, \ \mu_{i3}, \ \mu_{3i}$ — линейные функции от α_3.

В описании НДС внутренней задачи остается выяснить роль переменных (α_1, α_2), задающих положение точки на срединной поверхности оболочки. С этой точки зрения целесообразно введение вместо силовых и моментных напряжений статически эквивалентных им усилий и моментов:

$$\begin{aligned}
&T_{ii} = \int_{-h}^{h}(1+\alpha_3/R)\sigma_{ii}d\alpha_3, \ S_{ij} = \int_{-h}^{h}(1+\alpha_3/R_j)\sigma_{ij}d\alpha_3,\\
&G_{ii} = -\int_{-h}^{h}(1+\alpha_3/R_j)\sigma_{ii}\alpha_3 d\alpha_3,\\
&H_{ij} = \int_{-h}^{h}(1+\alpha_3/R_j)\sigma_{ij}\alpha_3 d\alpha_3, \ L_{ii} = \int_{-h}^{h}(1+\alpha_3/R_j)\mu_{ii}d\alpha_3,\\
&Lij = \int_{-h}^{h}(1+\alpha_3/R_j)\mu_{ij}d\alpha_3,\\
&N_{i3} = -\int_{-h}^{h}(1+\alpha_3/R_j)\sigma_{i3}d\alpha_3, \ L_{i3} = -\int_{-h}^{h}(1+\alpha_3/R_j)\mu_{i3}d\alpha_3,\\
&L_{33} = \int_{-h}^{h}(1+\alpha_3/R_1)(1+\alpha_3/R_2)\mu_{33}d\alpha_3.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Используем также понятия перемещений и поворотов точек срединной поверхности оболочки $u_i, w, \Omega_i, \Omega_3$.

Здесь как главный результат на уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-l})$ приведем основную систему уравнений внутренней задачи, т.е. систему уравнений прикладной-двумерной теории микрополярных оболочек с независимыми полями перемещений и вращений:

уравнения равновесия:

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{A_i}\tfrac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i}+\tfrac{1}{A_iA_j}\tfrac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}(T_{ii}-T_{jj})+\tfrac{1}{A_j}\tfrac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j}+\tfrac{1}{A_iA_j}\tfrac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}(S_{ji}+S_{ij})-(q_i^{+}+q_i^{-})=0;\\
&\tfrac{1}{A_i}\tfrac{\partial L_{ii}}{\partial \alpha_i}+\tfrac{1}{A_iA_j}\tfrac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}(L_{ii}-L_{jj})+\tfrac{1}{A_j}\tfrac{\partial L_{ji}}{\partial \alpha_j}+\tfrac{1}{A_iA_j}\tfrac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}(L_{ji}+L_{ij})+\\
&+(-1)^j(N_{3j}-N_{j3})-(m_i^{+}+m_i^{-})=0;\\
&\tfrac{T_{11}}{R_1}+\tfrac{T_{22}}{R_2}+\tfrac{1}{A_1A_2}\left[\tfrac{\partial(A_2N_{13})}{\partial \alpha_1}+\tfrac{\partial(A_1N_{23})}{\partial \alpha_2}\right]+(q_3^{+}+q_3^{-})=0;\\
&\tfrac{L_{11}}{R_1}+\tfrac{L_{22}}{R_2}+\tfrac{1}{A_1A_2}\left[\tfrac{\partial(A_2L_{13})}{\partial \alpha_1}+\tfrac{\partial(A_1L_{23})}{\partial \alpha_2}\right]-(S_{12}-S_{21})+(m_3^{+}+m_3^{-})=0.
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

соотношения упругости:

$$
\begin{gathered}
T_{ii}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}[\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}],\ S_{ij}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{ij}+(\mu-\alpha)\Gamma_{ji}],\\
N_{i3}=-2h\frac{4\alpha\mu}{\alpha+\mu}\Gamma_{i3}-\frac{\alpha-\mu}{\alpha+\mu}N_{3i};\\
L_{ii}=2h\left[\tfrac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}\chi_{ii}+\tfrac{2\gamma\beta}{\beta+2\gamma}\chi_{jj}\right]-h\tfrac{\beta}{\beta+2\gamma}(m_3^{+}-m_3^{-}),\\
L_{ij}=2h[(\gamma+\varepsilon)\chi_{ij}+(\gamma-\varepsilon)\chi_{ji}];\\
L_{i3}=-2h\tfrac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\chi_{i3}+\tfrac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}L_{3i},\quad \text{где}\quad N_{3i}=h(q_i^{+}-q_i^{-}),\ L_{3i}=h(m_i^{+}-m_i^{-});
\end{gathered}
\tag{4.4}
$$

геометрические соотношения:

$$
\begin{gathered}
\gamma_i=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial a_i}-\frac{u_i}{R_i},\ \Gamma_{i3}=\gamma_i+(-1)^j\Omega_j,\ \chi_{i3}=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_3}{\partial a_i}-\frac{\Omega_i}{R_i};\\
\Gamma_{ii}\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial a_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial a_j}u_j-\frac{w}{R_i},\ \Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial a_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial a_j}u_i+(-1)^j\Omega_3;\\
\chi_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_i}{\partial a_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial a_j}\Omega_j-\frac{\Omega_3}{R_i},\ \chi_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_j}{\partial a_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial a_j}\Omega_i.
\end{gathered}
\tag{4.5}
$$

Изучая погранслой при условии (4.1), получим, что на уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-l})$ микрополярный погранслой имеет четыре составляющие — это плоские и антиплоские силовые и моментные невзаимосвязанные между собой погранслои в полуполосе: $0\le\xi_1'<\infty$, $-1\le\zeta\le1$, для которых получены соответствующие условия затухания. Изучив задачу сращивания внутренней и погранслойной задач, получим граничные условия построенной двумерной теории:

$$
\begin{gathered}
T_{11}\big|_{\Gamma}=\int\limits_{-h}^{h}p_1^*d\alpha_3,\ S_{12}\big|_{\Gamma}=\int\limits_{-h}^{h}p_2^*d\alpha_3,\ N_{13}\big|_{\Gamma}=-\int\limits_{-h}^{h}p_3^*d\alpha_3,\\
L_{11}\big|_{\Gamma}=\int\limits_{-h}^{h}m_1^*d\alpha_3,\ L_{12}\big|_{\Gamma}=\int\limits_{-h}^{h}m_2^*d\alpha_3,\ L_{13}\big|_{\Gamma}=-\int\limits_{-h}^{h}m_3^*d\alpha_3.
\end{gathered}
\tag{4.6}
$$

Таким образом, система двумерных уравнений (4.3)-(4.5) и граничные условия (4.6) определяют математическую модель упругой тонкой микрополярной оболочки с независимыми полями перемещений и вращений.

5. Прикладная-двумерная теория микрополярных упругих тонких оболочек со стесненным вращением. Предположим, что безразмерные физические константы материала оболочки (3.1) теперь представимы в виде:

$$\frac{\alpha}{\mu}\sim 1,\ \frac{\beta}{R^2\mu}=\lambda^{-2l}\beta_*,\ \frac{\gamma}{R^2\mu}=\lambda^{-2l}\gamma_*,\ \frac{\varepsilon}{R^2\mu}=\lambda^{-2l}\varepsilon_*,\ \beta_*,\gamma_*,\varepsilon_*\sim 1. \tag{5.1}$$

На уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-l})$ получим асимптотические представления для величин внутренней задачи; в данном случае имеем, что компоненты вектора вращения в точках срединной поверхности оболочки выражаются через компоненты вектора перемещения в этих точках.

На уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-l})$ приведем основную систему двумерных уравнений микрополярных оболочек со стесненным вращением:

уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{A_i}\tfrac{\partial T_{ii}}{\partial a_i}+\tfrac{1}{A_iA_j}\tfrac{\partial Aj}{\partial a_i}(T_{ii}-T_{jj})+\tfrac{1}{A_j}\tfrac{\partial S_{ji}}{\partial a_j}+\tfrac{1}{A_iA_j}\tfrac{\partial A_i}{\partial a_j}(A_{ji}+S_{ij})-(q_i^++q_i^-)=0;\\&\tfrac{T_{11}}{R_1}+\tfrac{T_{22}}{R_2}+\tfrac{1}{A_1A_2}\left[\tfrac{\partial(A_2N_{13})}{\partial a_1}+\tfrac{\partial(A_1N_{23})}{\partial a_2}\right]+(q_3^++q_3^-)=0;\end{aligned}\tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{A_i}\tfrac{\partial}{\partial a_i}(G_{ii}-(-1)^jL_{ij})+\tfrac{1}{A_iA_j}\tfrac{\partial A_j}{\partial a_i}[(G_{ii}-(-1)^jL_{ij})-(G_{jj}+(-1)^jL_{ji})]-\\&-\tfrac{1}{A_j}\tfrac{\partial}{\partial a_j}(H_{ji}+(-1)^jL_{jj})-\tfrac{1}{A_iA_j}\tfrac{\partial A_i}{\partial a_j}[(H_{ji}+(-1)^jL_{jj})+(H_{ij}-(-1)^jL_{ii})]-\\&-N_{i3}+h(q_i^+-q_i^-)+(-1)^j(m_j^++m_j^-)=0;\end{aligned}$$

соотношения упругости:

$$\begin{aligned}&T_{ii}=\tfrac{2Eh}{1-\nu^2}[\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}],\ S_{ij}=\tfrac{2Eh}{1+\nu}[\Gamma_{12}+\Gamma_{21}]+(-1)^j\tfrac{1}{2}(m_3^++m_3^-);\\&G_{ii}=-\tfrac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}[K_{ii}+\nu K_{jj}],H_{ij}=\tfrac{Eh^3}{3(1+\nu)}[K_{12}+K_{21}]+(-1)^j\tfrac{1}{2}[(m_3^+-m_3^-)+L_{33}];\\&L_{ii}=2h\left[\tfrac{4\gamma(\gamma+\beta)}{2\gamma+\beta}\chi_{ii}+\tfrac{2\gamma\beta}{2\gamma+\beta}\chi_{jj}\right]+\tfrac{\beta}{\beta+2\gamma}L_{33},\ L_{ij}=2h[(\gamma+\varepsilon)\chi_{ij}+(\gamma-\varepsilon)\chi_{ji}];\\&L_{33}=\left(\tfrac{th(hk_1)}{hk_1}-1\right)4h\gamma(\chi_{11}+\chi_{22})-\tfrac{th(hk_1)}{k_1}(m_3^+-m_3^-),\ k_1=\sqrt{\tfrac{4\alpha}{\beta+2\gamma}};\end{aligned}\tag{5.3}$$

геометрические соотношения:

$$\begin{aligned}&\Gamma_{ii}=\tfrac{1}{A_i}\tfrac{\partial u_i}{\partial a_i}+\tfrac{1}{A_iA_j}\tfrac{\partial A_i}{\partial a_j}u_j-\tfrac{w}{R_i},\ \Gamma_{ij}=\tfrac{1}{A_i}\tfrac{\partial u_j}{\partial a_i}-\tfrac{1}{A_iA_j}\tfrac{\partial A_i}{\partial a_j}u_i;\\&K_{ii}=\tfrac{1}{A_i}\tfrac{\partial\beta_i}{\partial a_i}+\tfrac{1}{A_iA_j}\tfrac{\partial A_i}{\partial a_j}\beta_j,\ K_{ij}=\tfrac{1}{A_i}\tfrac{\partial\beta_j}{\partial a_i}-\tfrac{1}{A_iA_j}\tfrac{\partial A_i}{\partial a_j}\beta_i,\ \beta_i=\tfrac{1}{A_i}\tfrac{\partial w}{\partial a_i}+\tfrac{u_i}{R_i};\\&\chi_{ii}=\tfrac{1}{A_i}\tfrac{\partial\Omega_i}{\partial a_i}+\tfrac{1}{A_iA_j}\tfrac{\partial A_i}{\partial a_j}\Omega_j-\tfrac{\Omega_3}{R_i},\ \chi_{ij}=\tfrac{1}{A_i}\tfrac{\partial\Omega_j}{\partial a_i}-\tfrac{1}{A_iA_j}\tfrac{\partial A_i}{\partial a_j}\Omega_i;\\&\Omega_i=-(-1)^j\beta_j,\ \Omega_3=\tfrac{1}{2}(\Gamma_{21}-\Gamma_{12}).\end{aligned}\tag{5.4}$$

Построив микрополярный погранслой соответственно случаю (5.1), получив условия затухания и, далее, изучив задачу сращивания внутренней задачи и погранслоев, определим граничные условия для двумерной теории (5.2)-(5.4):

$$\begin{aligned}&T_{11}\big|_\Gamma=\int_{-h}^{h}p_1^*d\alpha_3,\ S_{12}\big|_\Gamma=\int_{-h}^{h}p_2^*d\alpha_3,\ (L_{12}-G_{11})\big|_\Gamma=\int_{-h}^{h}(\alpha_3p_1^*+m_2^*)d\alpha_3;\\&\left[-N_{13}+\tfrac{1}{A_2}\tfrac{\partial}{\partial\alpha_2}(H_{12}-L_{11})\right]\big|_\Gamma=\int_{-h}^{h}\left[p_3^*+\tfrac{1}{A_2}\tfrac{\partial}{\partial\alpha_2}(\alpha_3p_2^*-m_1^*)\right]d\alpha_3.\end{aligned}\tag{5.5}$$

Система двумерных уравнений (5.2)-(5.4) и граничные условия (5.5) определяют математическую модель упругой тонкой микрополярной оболочки со стесненным вращением.

6. Прикладная-двумерная теория микрополярных оболочек "с малой сдвиговой жесткостью". Предположим теперь, что физические безразмерные параметры (3.1) представимы в виде:

$$\frac{\alpha}{\mu}=\lambda^{-2l+2p}\alpha_*,\ \frac{\beta}{R^2\mu}\sim 1,\ \frac{\gamma}{R^2\mu}\sim 1,\ \frac{\varepsilon}{R^2\mu}\sim 1,\ \alpha_*\sim 1. \tag{6.1}$$

Определяя величины для внутренней задачи на уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-l})$, получим на основе этих данных двумерные уравнения, величины "чисто моментного" происхождения отделяются и образуют отдельную систему уравнений. Для "силовой" части задачи получим своеобразную сдвиговую теорию оболочек, в которой углы поворота (сдвиговые деформации) обусловлены "чисто моментной" частью задачи.

Сформулируем эти отдельные группы двумерных уравнений.

Уравнения "чисто моментной" части задачи микрополярных оболочек:

уравнения равновесия:

$$\begin{gathered}\frac{1}{A_i}\frac{\partial L_{ii}}{\partial a_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial a_i}(L_{ii}-L_{jj})+\frac{1}{A_j}\frac{\partial L_{ji}}{\partial a_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial a_j}(L_{ji}+L_{ij})-(m_i^++m_i^-)=0;\\ \frac{L_{11}}{R_1}+\frac{L_{22}}{R_2}+\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2L_{13})}{\partial a_1}+\frac{\partial(A_1L_{23})}{\partial a_2}\right]+(m_3^++m_3^-)=0;\end{gathered} \tag{6.2}$$

соотношения упругости:

$$\begin{gathered}L_{ii}=2h\left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}\chi_{ii}+\frac{2\gamma\beta}{\beta+2\gamma}\chi_{jj}\right],\ L_{ij}=2h[(\gamma+\varepsilon)\chi_{ij}+(\gamma-\varepsilon)\chi_{ji}];\\ L_{i3}=-2h\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\chi_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}L_{3i},\quad \text{где}\quad L_{3i}=h(m_i^+-m_i^-);\end{gathered} \tag{6.3}$$

геометрические соотношения:

$$\chi_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial a_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial a_j}\Omega_j-\frac{\Omega_3}{R_i},\ \chi_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial a_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial a_j}\Omega_i,\ \chi_{i3}=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_3}{\partial a_i}-\frac{\Omega_i}{R_i}. \tag{6.4}$$

Уравнения "чисто силовой" части задачи микрополярных оболочек:

уравнения равновесия:

$$\begin{gathered}\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_{ii}}{\partial a_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial a_i}(T_{ii}-T_{jj})+\frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ji}}{\partial a_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial a_j}(S_{ji}+S_{ij})-(q_i^++q_i^-)=0;\\ \frac{T_{11}}{R_1}+\frac{T_{22}}{R_2}+\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2N_{13})}{\partial a_1}+\frac{\partial(A_1N_{23})}{\partial a_2}\right]+(q_3^++q_3^-)=0;\\ N_{3i}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial G_{ii}}{\partial a_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial a_i}(G_{ii}-G_{jj})-\frac{1}{A_j}\frac{\partial H_{ji}}{\partial a_j}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial a_j}(H_{ji}+H_{ij})+h(q_i^+-q_i^-);\end{gathered} \tag{6.5}$$

соотношения упругости:

$$\begin{gathered}T_{ii}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}[\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}],\ S_{12}=S_{21}=2h\mu[\Gamma_{12}+\Gamma_{21}],\ N_{i3}=N_{3i}-8h\alpha\Gamma_{i3};\\ G_{ii}=-\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}[K_{ii}+\nu K_{jj}],\ H_{12}=H_{21}=\frac{2h^3}{3}\mu[K_{12}+K_{21}];\end{gathered} \tag{6.6}$$

геометрические соотношения:

$$\Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial a_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial a_j}u_j-\frac{w}{R_i},\ \Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial a_j}{\partial a_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial a_j}u_i,\ \Gamma_{i3}=-\beta_i+(-1)^j\Omega_j;$$
$$\beta_i=\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial a_i}+\frac{u_i}{R_i},\ K_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial \beta_i}{\partial a_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial a_j}\beta_j,\ K_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial \beta_j}{\partial a_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial a_j}\beta_i; \qquad (6.7)$$

Если коэффициент $8h\alpha$ будем трактовать как "сдвиговая-моментная жесткость" оболочки, тогда представленную двумерную теорию (6.2)-(6.4), (6.5)-(6.7) с учетом (6.1) можем трактовать как теорию микрополярных оболочек "с малой сдвиговой жесткостью".

Далее, построив микрополярный погранслой для случая (6.1) и изучив задачу сращивания внутренней задачи и погранслоя, получим соответствующие граничные условия для двумерной теории (6.2)-(6.4),(6.5)-(6.7):

$$L_{1i}\big|_\Gamma=\int_{-h}^{h}m_i^*d\alpha_3,\ L_{13}\big|_\Gamma=-\int_{-h}^{h}m_3^*d\alpha_3-\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\int_{-h}^{h}a_3m_2^*d\alpha_3; \qquad (6.8)$$

$$\begin{cases} T_{11}\big|_\Gamma=\int_{-h}^{h}p_1^*d\alpha_3,\ S_{12}\big|_\Gamma=\int_{-h}^{h}p_2^*d\alpha_3,\ G_{11}\big|_\Gamma=-\int_{-h}^{h}\alpha_3p_1^*d\alpha_3; \\ \left(-N_{13}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial H_{12}}{\partial\alpha_2}\right)\Big|_\Gamma=\int_{-h}^{h}p_3^*d\alpha_3+\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\int_{-h}^{h}\alpha_3p_2^*d\alpha_3. \end{cases} \qquad (6.9)$$

Таким образом, двумерные уравнения (6.2)-(6.4),(6.5)-(6.7) и граничные условия (6.8),(6.9) определяют математическую модель микрополярных оболочек с "малой сдвиговой жесткостью".

Гюмрийский педагогический институт им. М Налбандяна

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек

На основе трехмерной несимметричной (моментной, микрополярной) теории упругости при помощи сингулярно-возмущенного асимптотического метода построена прикладная-двумерная теория микрополярных тонких оболочек.

Соответственно трем различным значениям безразмерных физических параметров построены прикладные-двумерные теории микрополярных оболочек со свободным вращением; со стесненным вращением; "с малой сдвиговой жесткостью".

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Հ. Սարգսյան

Միկրոպոլյար առաձգական բարակ թաղանթների ընդհանուր տեսություն

Առաձգականության ոչ սիմետրիկ (մոմենտային, միկրոպոլյար) եռաչափ տեսության հիման վրա սինգուլյար-գրգռող ասիմպտոտիկ մեթոդի օգնությամբ կառուցված է միկրոպոլյար բարակ թաղանթների կիրառական-երկչափ տեսությունը:

Անչափ ֆիզիկական պարամետրերի երեք տարբեր արժեքներին համապատասխան կառուցված են անկախ պտույտներով, կաշկանդված պտույտներով եւ «փոքր սահքային կոշտության» միկրոպոլյար թաղանթի կիրառական-երկչափ տեսությունները:

Correspondent Member of NAS RA S. H. Sargsyan

The General Theory of Micropolar Thin Elastic Shells

On the basis of three-dimensional asymmetrical (momental, micropolar) theory of elasticity, with the help of singularly-disturbed asymptotic method the applied-two-dimensional theory of micropolar thin shells is constructed.

Depending on values of dimensionless physical parameters, the applied-two-dimensional theory of micropolar shells with independent fields of transition and rotations; the applied-two-dimensional theory of micropolar plates with the constraint rotation and the applied-two-dimensional theory of micropolar plates "with small shift rigidity" are constructed.

Литература

1. Перспективные материалы и технологии. Нанокомпозиты. Под ред. А.А Берлина, И. Г. Ассовского. М. Торус пресс. 2005. 288 с.

2. *Амбарцумян С. А.* Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван. Изд-во НАН Армении. 1999. 214 с.

3. *Саркисян С. О.* - Сб. докл. XIX Международной конференции по теории оболочек и пластин. Н. Новгород: 28-30 сентября 1999. Изд-во Нижегородского ун-та. 1999. С. 186-189.

4. *Никогосян Г. С., Саркисян С. О.* - Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т. 58. N1. С. 15-37.

5. *Никогосян Г. С., Саркисян С. О.* - Доклады НАН Армении. 2005. N2. С. 132-139.

6. *Саркисян С. О.* - Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. N1. С. 129-147.

7. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, etc. Pergamon Press.

1986. 383 p.

8. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М. Наука. 1976. 512 с.

9. *Агаловян Л. А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. Наука. 1997. 414 с.

10. *Саркисян С. О.* Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван. Изд-во АН РА. 1992. 232 с.