ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 108 2008 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 517

С. П. Яковлев

О структуре гипергеометрических распределений

(Представлено академиком В.С. Захаряном 1/X 2008)

Ключевые слова: *гипергеометрическое распределение, регулярное распределение, выпуклость, вогнутость*

1. Введение. Семейство регулярных гипергеометрических распределений $\{p_n\}$

$$p_0 = \frac{\Gamma(q-\hat{p}_1)\Gamma(q-\hat{p}_2)}{\Gamma(q-\hat{p}_1-\hat{p}_2)\Gamma(q)},\ p_n = p_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(\hat{p}_1+k)(\hat{p}_2+k)}{(1+k)(q+k)},\ n = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-фунцкия Эйлера, введено в [1], с. 161-173 (см. также [2]). Найдены: производящая функция, факториальные моменты; доказано правильное изменение с показателем $(-\rho)$, где

$$\rho = q + 1 - \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \in (1, +\infty); \tag{2}$$

установлено, что $\{p_n\}$ убывает, лог-вогнуто и унимодально с модой p_0 при

$$\min(\hat{p}_1, \hat{p}_2) < 1. \tag{3}$$

Свойства монотонности и лог-выпуклости/лог-вогнутости $\{p_n\}$ при $\hat{p}_1 > 1$, $\hat{p}_2 > 1$ обсуждены в [3].

Определение 1. *Пусть* $\{\varepsilon_n\}$ *— последовательность положительных чисел.*
(1) $\{\varepsilon_n\}$ *выпукла (вогнута) для индекса* n*, если* $\varepsilon_{n+2} - \varepsilon_{n+1} < (>) \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n$.
(2) $\{\varepsilon_n\}$ *лог-выпукла (лог-вогнута) для индекса* n*, если* $(\varepsilon_n/\varepsilon_{n+1}) < (>) (\varepsilon_{n+1}/\varepsilon_{n+2})$.

Лемма 1. *На массиве индексов* $n = \underline{n}, \underline{n}+1, \dots, \overline{n}$ *выпуклость* $\{\varepsilon_n\}$ *влечет лог-выпуклость* $\{\varepsilon_n\}$*, лог-вогнутость* $\{\varepsilon_n\}$ *влечет вогнутость* $\{\varepsilon_n\}$.

Доказательство. $\{\varepsilon_n\}$ состоит из не более чем счетного числа монотонных кусков. Без ограничения общности считаем, что на каждом куске (массиве индексов) $\{\varepsilon_n\}$ строго монотонно. Докажем лемму 1 на массиве с возрастающей $\{\varepsilon_n\}$. Случай убывания $\{\varepsilon_n\}$ доказывается аналогично.

Если на заданном массиве $\{\varepsilon_n\}$ выпукла, то

$$(\varepsilon_{n+1}/\varepsilon_n) > 1, \quad \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}\left(\frac{\varepsilon_{n+2}}{\varepsilon_{n+1}} - 1\right) < \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} - 1. \tag{4}$$

Допустим, что $\{\varepsilon_n\}$ для n_0 из массива не является лог-выпуклой, т.е.

$$(\varepsilon_{n_0+1}/\varepsilon_{n_0}) - 1 \leq (\varepsilon_{n_0+2}/\varepsilon_{n_0+1}) - 1. \tag{5}$$

Из первого неравенства в (4) для n_0 и из (5) получаем

$$\frac{\varepsilon_{n_0+1}}{\varepsilon_{n_0}}\left(\frac{\varepsilon_{n_0+2}}{\varepsilon_{n_0+1}} - 1\right) > \frac{\varepsilon_{n_0+1}}{\varepsilon_{n_0}} - 1,$$

что противоречит второму неравенству в (4).

Если на заданном массиве $\{\varepsilon_n\}$ лог-вогнута, то $(\varepsilon_{n+1}/\varepsilon_n) > 1$ и $(\varepsilon_{n+2}/\varepsilon_{n+1}) - 1 > (\varepsilon_{n+1}/\varepsilon_n) - 1$, что после перемножения неравенств дает $\varepsilon_{n+2} - \varepsilon_{n+1} > \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n$.

По лемме 1, существование пары «выпуклость и лог-вогнутость» для индекса n невозможно. Возможность сосуществования пары «вогнутость и лог-выпуклость» доказана в [4], с. 61-62.

По лемме 1, $\{p_n\}$ при условии (3) будучи лог-вогнутым вогнуто.

Цель настоящей статьи заключается в изучении свойств монотонности и двух типов выпуклости/вогнутости распределений (1). В силу вышесказанного изучению подлежит случай $\hat{p}_1 > 1$, $\hat{p}_2 > 1$. При этом найдется натуральное $n_0 = 0, 1, 2, \ldots$ такое, что

$$n_0\rho < (\hat{p}_1 - 1)(\hat{p}_2 - 1) \leq (n_0 + 1)\rho. \tag{6}$$

2. Монотонность. Число n_0 в (6) имеет определенный смысл.

Теорема 1. *1. Если $(\hat{p}_1 - 1)(\hat{p}_2 - 1) < \rho$, то $\{p_n\}$ убывает.*

2. Если выполнено (6) со строгим неравенством, с $n_0 > 0$, то $\{p_n\}$ убывает при $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$, возрастает при $n = 0, 1, \ldots, n_0$.

Доказательство основано на формуле (см. (1))

$$p_{n+1} = p_n \tau_n, \quad \text{где} \quad \tau_n = \frac{(\hat{p}_1 + n)(\hat{p}_2 + n)}{(1 + n)(q + n)}, \; n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

В силу (2) эквивалентны неравенства

$$\hat{p}_1 \cdot \hat{p}_2 > (<)(=) q \quad \text{и} \quad (\hat{p}_1 - 1)(\hat{p}_2 - 1) > (<)(=) \rho. \tag{8}$$

С помощью (7) легко проверяется неравенство

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = 1 - \frac{\rho}{q+n} + \tau'_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{9}$$

где $\tau'_n = \frac{(\hat{p}_1-1)(\hat{p}_2-1)}{(1+n)(q+n)}$.

Случай $\hat{p}_1 = 1$ (или $\hat{p}_2 = 1$) с заменой q на $q+1$ приводит к изученному распределению Уорринга (см . [1]) и исключается из рассмотрения.

1. В силу (8) $0 > \hat{p}_1\hat{p}_2 - q - (q + 1 - \hat{p}_1 - \hat{p}_2) = (\hat{p}_1 + n)(\hat{p}_2 + n) - (1+n)(q+n)$ при $n = 0, 1, 2, \dots$, или $\tau_n < 1$. Это из-за (7) означает $p_0 > p_1 > p_2 > \dots$.

2. Запишем (9) в виде $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} = 1 - \dfrac{1}{1+n}\dfrac{1}{q+n}\{(1+n)\rho - (\hat{p}_1-1)(\hat{p}_2-1)\}$, что, по (6), влечет $\dfrac{p_{n+1}}{p_n}\begin{cases} > 1 & \text{при} \quad n = 0, 1, \dots, n_0 - 1, \\ < 1 & \text{при} \quad n = n_0, n_0+1, \dots. \end{cases}$

Замечание 1. В случае равенства справа в (6) с $n_0 \geq 0$ утверждения теоремы 1 сохраняются, разве лишь $p_{n_0} = p_{n_0+1}$.

3. Лог-выпуклость/лог-вогнутость. Вначале рассмотрению подлежит случай

$$e \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\rho}(\hat{p}_1 - 1)(\hat{p}_2 - 1) - 1 \leq 0, \quad \hat{p}_1 > 1, \quad \hat{p}_2 > 1. \tag{10}$$

Покажем, что при условии (10): $\{p_n\}$ либо лог-вогнуто; либо найдется индекс $n_1 > 0$ такой, что $\{p_n\}$ лог-выпукло при $n = 0, 1, \dots, n_1 - 1$, лог-вогнуто при $n = n_1, n_1 + 1, \dots$.

В силу (9) последовательность $\{\tau'_n\}$ состоит из положительных членов. Основной член формулы (9) — последовательность $\{1 - (\rho/(q+n))\}$ возрастает и вогнута, а $\{\tau'_n\}$ убывает и $\lim\limits_{n\to+\infty} \tau'_n = 0$. Очевидно «непродолжительное» воздействие $\{\tau'_n\}$ на $\{p_{n+1}/p_n\}$. Этим и обосновано наличие не более чем двух кусков графика последовательности $\{p_{n+1}/p_n\}$, последний из которых явяется выпуклым.

Условие (10) эквивалентно условию $\hat{p}_1, \hat{p}_2 < q$, $\hat{p}_1 > 1$, $\hat{p}_2 > 1$, что следует из (8). Согласно (7) $\tau_0 = 1 - 2\dfrac{\hat{p}_1\hat{p}_2}{q} + \dfrac{\hat{p}_1\hat{p}_2(\hat{p}_1+1)(\hat{p}_2+1)}{2(q+1)}$. По этой формуле возможно показать, что все ситуации, связанные с графиком $\{p_{n+1}/p_n\}$, могут осуществиться, т.е. $\tau_0 > 0$, $\tau_0 < 0$, $\tau_0 = 0$.

Примеры. Пусть $\hat{p}_1 = 1$, $\hat{p}_2 = 2$, $q = 4$, $\rho = 1.5$. Тогда $\tau_0 = \frac{2{,}5}{40} > 0$.
Пусть $\hat{p}_1 = 1.5$, $\hat{p}_2 = 4$, $q = 7$, $\rho = 2.5$ Тогда $\tau_0 = -\frac{2{,}5}{56} < 0$.
Пусть $\hat{p}_1 = 2$, $\hat{p}_2 = 2$, $q = 5$, $\rho = 2$ Тогда $\tau_0 = 0$.

Так как τ_0 — непрерывная относительно $\hat{p}_1$ функция, то в первом примере можно взять $\hat{p}_1$ «незначительно» больше единицы и получить $\tau_0 > 0$.

Ниже мы имеем дело с условием

$$\hat{p}_1 > 1, \ \hat{p}_2 > 1, \tag{11}$$

выполненным (6) с $n_0 \ge 0$.

Пусть $n_0 > 0$. Согласно (6) и (11), $n_0 - 1 < e < n_0$. Обозначим

$$f = (e+1)(\rho + \hat{p}_1 + \hat{p}_2), \quad t_1 = e + \sqrt{e^2 + f - 1}, \quad \hat{n}_1 = [t_1], \tag{12}$$

где $[x]$ есть целая часть числа $x > 0$. Из (10) и (11) легко выводится, что $\hat{n}_1 \ge n_0$. Равенство может иметь место лишь при $n_0 = 1$.

Теорема 2. *При условии (11) с* $n_0 > 0$ $\{p_n\}$ *лог-выпукло при* $n = 0, 1, \ldots, n_1$, *лог-вогнуто при* $n = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots$, *где* n_1 *равно* $\hat{n}_1 - 1$ *или* $\hat{n}_1$, *а* $\hat{n}_1$ *дано в (12).*

Доказательство. Мы покажем, что $\{p_n\}$ лог-выпукло при $n = 0, 1, \ldots, \hat{n}_1 - 1$, лог-вогнуто при $n = \hat{n}_1 + 1, \hat{n}_1 + 2, \ldots$. Линейный случай интерпретируем либо как лог-выпуклый, либо как лог-вогнутый при $p_{\hat{n}_1} = p_{\hat{n}_1+1}$ для индекса $\hat{n}_1$.

Введем следующий непрерывный аналог последовательности:

$$g(t) = 1 - \frac{\rho}{q+1} + \frac{(\hat{p}_1 - 1)(\hat{p}_2 - 1)}{(1+t)(q+t)}, \ t \in [0, +\infty). \tag{13}$$

Дифференцируя $g(t)$ и приравнивая к нулю, получаем квадратное уравнение $t^2 - 2et - (f-1) = 0$, из корней которого лишь t_1 (см. 12) положителен.

Проверяется, что

$$g'(0) = \frac{1}{q^2}\{\rho - (q+1)(\hat{p}_1 - 1)(\hat{p}_2 - 1)\} \le \frac{1}{q^2}\{\rho - (q+1)\rho\} = -\frac{\rho}{q} < 0,$$

где использовано первое неравенство в (10). Следовательно, $g(t)$ убывает в $[0, t_1)$, возрастает в $(t_1, +\infty)$. Тогда $\{p_{n+1}/p_n\}$ убывает при $n = 0, 1, \ldots, n_1 - 1$; лог-вогнуто при $n = \hat{n}_1 + 1, \hat{n}_1 + 2, \ldots$. Значит, $\{p_n\}$ лог-выпукло при $n = 0, 1, \ldots, n_1 - 1$, лог-вогнуто при $n = \hat{n}_1 + 1, \hat{n}_1 + 2, \ldots$.

Осталось рассмотреть случай индекса $\hat{n}_1$. Проверяем значения $p_{\hat{n}_1+1}/p_{\hat{n}_1}$ и $p_{\hat{n}_1+2}/p_{\hat{n}_1+1}$. Если первое больше второго, то $\{p_n\}$ лог-выпукло для индекса $\hat{n}_1$. В противном случае $\{p_n\}$ лог-вогнуто для индекса $\hat{n}_1$. Оба случая не меняют структуру графика $\{\log p_n\}$. Он образован из двух кусков.

4. Вспомогательные леммы. В силу торемы 2 и леммы 1 $\{p_n\}$ вогнуто для индексов $n = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots$. Так что проблему выпуклости/вогнутости $\{p_n\}$ осталось решить для индексов $n = 0, 1, \ldots, n_1$ при условии (11).

Обозначим

$$h_n = \frac{1}{q+n}\left\{\frac{(\hat{p}_1 - 1)(\hat{p}_2 - 1)}{1+n} - \rho\right\}. \tag{14}$$

При $n_0 \ge 2$ из (14) имеем $h_n > \dfrac{(n_0 - n - 1)\rho}{(1+n)(q+n)} > 0$ для $n = 0, 1, \ldots, n_0 - 2$.

Далее, пусть

$$\hat{h}_n = -h_n \ \text{ при } \ n = n_0 + 1, \ldots . \tag{15}$$

Тогда $\hat{h}_n > \dfrac{(n-n_0)\rho}{(1+n)(q+n)} \geq 0$ при $n = n_0, n_0+1, \ldots$.

Лемма 2. *Пусть выполнено условие (11). Тогда*

$$\begin{cases} \dfrac{p_{n+2}-p_{n+1}}{p_{n+1}-p_n} = h_{n+1} + \dfrac{h_{n+1}}{h_n}, & n = 0,1,\ldots,n_0-2,\ n_0 \geq 2, \\ \dfrac{p_{n+1}-p_{n+2}}{p_n-p_{n+1}} = -\hat{h}_{n+1} + \dfrac{\hat{h}_{n+1}}{\hat{h}_n}, & n = n_0, n_0+1, \ldots . \end{cases} \tag{16}$$

Доказательство. Произведем выкладки с учетом (7)

$$p_{n+1} - p_n = p_n \left\{ \tfrac{(\hat{p}_1+n)(\hat{p}_2+n)}{(1+n)(q+n)} - 1 \right\} = p_n \tfrac{1}{q+n} \left\{ \tfrac{(\hat{p}_1-1)(\hat{p}_2-1)}{1+n} - \rho \right\}, \quad n = 0,1,2\ldots .$$

Используя (14) и (15), получаем

$$\begin{cases} \dfrac{p_{n+2}-p_{n+1}}{p_{n+1}-p_n} = \dfrac{p_{n+1}}{p_n}\dfrac{h_{n+1}}{h_n}, & n = 0,1,\ldots,n_0-2,\ n_0 \geq 2, \\ \dfrac{p_{n+1}-p_{n+2}}{p_n-p_{n+1}} = \dfrac{p_{n+1}}{p_n}\dfrac{\hat{h}_{n+1}}{\hat{h}_n}, & n = n_0, n_0+1, \ldots . \end{cases} \tag{17}$$

Сравнивая $\{p_{n+1}/p_n\}$ из (9) и $\{h_n\}$, $\{\hat{h}_n\}$ из (14) и (15), заключаем, что $(p_{n+1}/p_n) = 1 + h_n$ при $n = 0,1,\ldots,n_0-2, n_0 \geq 2$ и $(p_{n+1/p_n}) = 1 - \hat{h}_n$ при $n = n_0, n_0+1, \ldots, \hat{n}_1$.

Отсюда и из (17) следует (16).

Лемма 3. *Пусть выполнено условие (11). Тогда* $\{h_n\}$ *убывает и вогнуто при* $n = 0,1,\ldots,n_0-2$, $n_0 \geq 2$, $\{\hat{h}_n\}$ *возрастает и выпукло при* $n = n_0, n_0+1,\ldots,n_1-1$.

Доказательство. Рассмотрим непрерывные аналоги $h(t) = g(t) - 1$ и $\hat{h}(t) = 1 - g(t)$, $t \in [0,+\infty)$ последовательностей $\{h_n\}$ и $\{\hat{h}_n\}$, где $g(t)$ задано формулой (13).

Из свойств $g(t)$ следует, что: $h(t)$ убывает на $[0, n_0-1)$, $n_0 > 0$, $\hat{h}(t)$ возрастает на $[n_0, n_1]$. Далее, легко видеть, что

$$h'(t) = -\frac{1}{q+t}\left\{h(t) + \frac{(\hat{p}_1-1)(\hat{p}_2-1)}{(1+t)^2}\right\},\ \hat{h}'(t) = \frac{1}{q+t}\left\{-\hat{h}(t) + \frac{(\hat{p}_1-1)(\hat{p}_2-1)}{(1-t)^2}\right\}.$$

Функции $(1/(q+t))$ и $(\hat{p}_1-1)(\hat{p}_2-1)/(1+t)^2$ убывают на $[0,+\infty)$. Поэтому с учетом монотонности $h(t)$ и $\hat{h}(t)$ заключаем, что: $h'(t)$ возрастает на $[0, n_0-1]$, $n_0 > 0$, $\hat{h}'(t)$ убывает на $[n_0, n_1]$. Из вышесказанного вытекает лемма 3.

Из лемм 2 и 3 вытекает

Следствие 1. Пусть выполнено условие (11). Тогда: для выпуклости (вогнутости) $\{p_n\}$ при $n = 0,1,\ldots,n_0-2, n_0 \geq 2$ необходимо и достаточно

$$\frac{1}{h_{n+1}} - \frac{1}{h_n} > (<) 1; \tag{18}$$

для выпуклости (вогнутости) $\{p_n\}$ при $n = n_0, n_0+1, \dots, n_1-1$ необходимо и достаточно

$$\frac{1}{\hat{h}_n} - \frac{1}{\hat{h}_{n+1}} < (>) 1. \tag{19}$$

5. Выпуклость/вогнутость. Сформулируем основной результат работы.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие (11).*

(а) Если $n_0 = 0$, *то либо* $\{p_n\}$ *вогнуто, либо найдется* n_2, $n_0 < n_2 \le n_1$ *такое, что* $\{p_n\}$ *выпукло при* $n = 0, 1, \dots, n_2 - 1$, *вогнуто при* $n = n_2, n_2+1, \dots$.

(б) Если $n_0 = 1$, *то имеет место вторая ситуация в (а).*

(в) Если $n_0 \ge 2$, *то либо осуществляется вторая ситуация в (а), либо найдутся индексы* n_2, $0 \le n_2 \le n_0 - 2$ *и* n_3, $n_3 \ge n_2 + 1$ *такие, что* $\{p_n\}$ *вогнуто при* $n = 0, 1, \dots, n_2$, *выпукло при* $n = n_2+1, n_2+2, \dots, n_3-1$, *вогнуто при* $n = n_3, n_3+1, \dots$.

Таким образом, график $\{p_n\}$ *состоит из не более чем трех выпуклых/вогнутых кусков.*

Доказательство. Из условия (6), обозначения (10) имеем

$$\begin{cases} e - n > 0 & \text{при} \quad n = 0, 1, \dots, n_0 - 1, n_0 > 0, \\ e - n < 0 & \text{при} \quad n = n_0, n_0+1, \dots . \end{cases} \tag{20}$$

Нетрудно вычислениями проверить, что неравенство (18) эквивалентно неравенству

$$\rho < (>) I_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(1+n)(q+n)}{(e-(1+n))(e-n)} + \frac{q+2n+1}{e-(1+n)}, \tag{21}$$

а неравенство (19) — неравенству

$$\rho > (<) I_n = \frac{1}{(1+n)-e} - 1 + \frac{(e+1)(e+q)}{((1+n)-e)(n-e)}, \tag{22}$$

где I_n определено в (21). По (20), оба слагаемых в правой части (21) при $n = 0, 1, \dots, n_0 - 2, n_0 \ge 2$ положительны. Они возрастают по n. Поэтому

$$I_0 - \rho < I_1 - \rho < \ldots < I_{n_0-2} - \rho. \tag{23}$$

Аналогично из (20) и (22) следует, что

$$I_{n_0} - \rho > I_{n_0+1} - \rho > I_{n_0+2} - \rho > \dots . \tag{24}$$

В силу (23) и (24) эти последовательности могут менять знак не более чем один раз. Рассмотрение в отдельности возможных ситуаций с учетом следствия 1 приводит к теореме 3. Разве лишь проверим, что при $n_0 \ge$

2 упомянутые в теореме 3 все ситуации для $n = 0, 1, \ldots, n_2 - 1$ могут осуществиться.

Действительно, в силу (1) справедливо равенство

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1 - p_0} = \{(\hat{p}_1 - 1)(\hat{p}_2 - 1) - 2\rho\}\frac{3q+1}{2q(q+1)} + \frac{\rho}{q}. \tag{25}$$

Примеры. Пусть $\hat{p}_1 = 4$, $\hat{p}_2 = 4$, $\rho = 2$, $q = 9$. Условие (6) выполнено с $n_0 = 4$:

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1 - p_0} = 1 + \frac{35}{36} > 1.$$

Пусть $\hat{p}_1 = 7$, $\hat{p}_2 = 2$, $\rho = 2$, $q = 10$. Условие (6) выполнено с $n_0 = 3$:

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1 - p_0} = \frac{27}{55} < 1.$$

Пусть $\hat{p}_1 = 4 + \sqrt{61/31}$, $\hat{p}_2 = 4 - \sqrt{61/31}$, $\rho = 3$, $q = 10$. Условие (6) выполнено с $n_0 = 2$:

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1 - p_0} = 1.$$

Ереванский государственный университет

С. П. Яковлев

О структуре гипергеометрических распределений

Рассмотрено семейство гипергеометрических распределений. Изучены монотонность, лог-выпуклость/вогнутость и выпуклость/вогнутость в обычном смысле.

Ս. Պ. Յակովլև

Հիպերերկրաչափական բաշխումների կառուցվածքի մասին

Աշխատանքում դիտարկված է ռեգուլյար հիպերերկրաչափական բաշխումների ընտանիքը: Ուսումնասիրված են ընտանիքի բաշխումների մոնոտոնությունը, լոգ-ուռուցիկությունը դեպի վերեւ/ներքեւ, ուռուցիկությունը դեպի վերեւ/ներքեւ:

S. P. Yakovlev

On the Structure of Hypergeometric Distributions

The family of Regular Hypergeometric Distributions is considered. The properties of monotonity, log-downward/log-upward convexity, downward/upward convexity of such distributions are deeply investigated.

Литература

1. *Astola J., Danielian E.* - Tampere: TICSP Series, 2006. ♯31. 251p.
2. *Danielian E., Astola J.* - Tampere: TICSP Series. 2006. ♯34. P. 127-132.
3. *Аракелян А.Г.* Устойчивость частотных распределений в биомолеку-лярных моделях. Автореф. канд. дис. Ереван. ЕГУ. 2007.
4. *Astola J., Danielian E.* - Tampere: TICSP Series. 2004. ♯27. 94p.