ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 108 2008 № 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

М. В. Белубекян, С. Р. Мартиросян

Об одном неожиданном совпадении в задаче устойчивости пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа

(Представлено академиком В.С. Саркисяном 1/II 2008)

Ключевые слова: *пластинка, устойчивость, сосредоточенные масса и момент, собственные значения, флаттер*

В работах [1] и [2] исследована задача устойчивости тонкой упругой пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа в предположении, что одна из длинных кромок свободна, а другая — жестко защемлена [1] и одна из длинных кромок имеет жесткое скользящее защемление, а другая — шарнирно оперта [2]. При этом имеется сосредоточенный инерционный момент на свободной и на шарнирно опертой кромках, соответственно, в [1] и [2]. Установлено, что возможна потеря устойчивости в виде дивергенции и флаттера в обеих задачах. Найдены критические значения скорости потока, приводящие к дивергентной и флаттерной неустойчивости. Неожиданным оказалось совпадение в обеих задачах этих критических значений скорости потока.

В предлагаемой статье показано совпадение собственных значений в обеих задачах, а следовательно, критических значений скорости потока, а также в более общей постановке, когда на свободной кромке приложены одновременно сосредоточенные инерционные масса и момент (в первой задаче), и когда сосредоточенные инерционные масса и момент приложены, соответственно, на кромке с жестким скользящим защемлением и на шарнирно опертой кромке (во второй задаче), несмотря на то, что эти задачи являются несамосопряженными.

1. Пусть тонкая пластинка в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \le x \le l$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. Пластинка обтекается с одной стороны в направлении оси Ox сверхзвуковым потоком газа с невозмущенной скоростью V. В целях упрощения будем полагать, что распределенная масса пластинки и силы сопротивления пренебрежимо малы. Тогда, в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и поршневой теории, уравнение изгибных колебаний удлиненной пластинки имеет вид [3-5]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + s^3 \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \ w = w(x,t), \ s^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1}. \tag{1}$$

Здесь, ρ_0 — плотность невозмущенного потока газа; a_0 — скорость звука в невозмущенной газовой среде; $w = w(x,t)$ — функция прогиба точек срединной поверхности пластинки; D — цилиндрическая жесткость на изгиб.

Исследуем уравнение (1) при следующих граничных условиях:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = -\beta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \ x = 0; \ w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \ x = l; \tag{2}$$

и

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = -\beta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \ x = 0; \ w = 0, \ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\alpha \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \ x = l, \tag{3}$$

где $\alpha = JD^{-1}$, $\beta = mD^{-1}$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$; J, m — сосредоточенные момент и масса, соответственно, приложенные к свободной кромке $x = 0$.

В работе [1] исследована задача устойчивости пластинки (1), (2) при $\alpha \geq 0$ и $\beta = 0$, а в [2] — задача устойчивости пластинки (1), (3) при всех $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$.

Исследуем задачу устойчивости пластинки (1), (2) при всех $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$. Отыскивая решение задачи (1), (2) в виде

$$w(x,t) = f(x) \cdot \exp(i\omega t), \tag{4}$$

приходим к следующей задаче на собственные значения:

$$f'''' + s^3 f' = 0, \tag{5}$$

$$f'' + \alpha\omega^2 f' = 0, \ f''' - \beta\omega^2 f = 0, \ x = 0; \ f = f' = 0, \ x = l. \tag{6}$$

Подставляя общее решение уравнения (5)

$$w(x) = A_1 + A_2 \cdot \exp(-sx) + (A_3 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}sx) + A_4 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}sx)) \cdot \exp(\frac{sx}{2})$$

в граничные условия (6), получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_i, $i = 1,2,3,4$

$$\begin{cases} 2(s - \alpha\omega^2)A_2 - (s - \alpha\omega^2)A_3 + \sqrt{3}(s + \alpha\omega^2)A_4 = 0, \\ \beta\omega^2 A_1 + (s^3 + \beta\omega^2)A_2 + (s^3 + \beta\omega^2)A_3 = 0, \\ A_1 + A_2 \exp(-sl) + (A_3 \cos(\sqrt{3}/2 \cdot sl) + A_4 \sin(\sqrt{3}/2 \cdot sl)) \exp(0.5sl) = 0, \\ A_2 \exp(-sl) - (A_3 \sin(\pi/6 - \sqrt{3}/2 \cdot sl) + A_4 \cos(\pi/6 - \sqrt{3}/2 \cdot sl)) \exp(0.5sl) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Для нахождения значений параметров s, α, β, приводящих к потере устойчивости в задаче (1), (2), имеем уравнение относительно квадратов частот собственных колебаний пластинки

$$\tilde{\alpha}\tilde{\beta}A(r)\omega^4 - (\tilde{\beta}B_1(r) + \tilde{\alpha}B_2(r))r\omega^2 + r^4C(r) = 0, \tag{8}$$

$$r = sl, \ \tilde{\alpha} = \alpha l, \ \tilde{\beta} = \beta l^3;$$

$$A(r) = ch(r) - \exp(0.5r)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}r\right) - \exp(-0.5r)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}r\right),$$

$$B_1(r) = 2sh(0.5r)\cdot\left(ch(0.5r) - \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)\right), \tag{9}$$

$$C(r) = 0.5\exp(-r) + \exp(0.5r)\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right),$$

которое получается приравниванием нулю определителя, составленного из коэффициентов системы (7). Уравнение (8) в точности такое же, какое получено в работе [2] при исследовании задачи устойчивости (1), (3). А это означает, что в зависимости от параметров s (или V), α, β поведение характеристических показателей $p = \pm i\omega$ обеих задач одинаково. Иными словами, одинаково в задачах (1), (2) и (1), (3) поведение возмущенного движения пластинки. Однако при этом их общие решения различны. Система однородных алгебраических уравнений (7) отличается от аналогичной системы уравнений, полученной при исследовании задачи (1), (3) в работе [2].

Из уравнения (8), в соответствии с (4), следует, что возмущенное движение устойчиво при выполнении следующих условий:

$$\begin{gathered} C(r,k) \in (0; (B_1(r) + kr^2B_2(r))^2\cdot(4kr^2A(r))^{-1}), \\ B_1(r) + kr^2B_2(r) \geq 0, \ k = \alpha(\beta l^2)^{-1}, \ k \in (0,\infty), r \in (0,\infty). \end{gathered} \tag{10}$$

Критическим состояниям соответствуют границы интервала (10):

$$C(r,k) = 0; \ C(r,k) = (B_1(r) + kr^2B_2(r))^2\cdot(4kr^2A(r))^{-1}, \tag{11}$$

$$k = \alpha(\beta l^2)^{-1}, \ k \in (0,\infty), \ r \in (0,\infty).$$

Первое из условий (11) определяет неустойчивость дивергентного типа. При этом для всех $k \in (0,\infty)$ наименьшее значение параметра $r_0 = (sl)_0 \approx 1.85$, а соответствующее критическое значение скорости потока, приводящее к дивергенции, $V_{\text{кр}0} \approx 6.33D(a_0\rho_0 l^3)^{-1}$.

Второе из условий (11) определяет неустойчивость флаттерного типа. При этом $r_{\min\text{фл}}$ и $V_{\text{кр.фл}}$ зависят от k: явление флаттерной неустойчивости имеет место при $k \geq 0.08$ [2]. Итак, как показано в [2], при $k = 0.10$ $V_{\text{кр.фл}} \approx 198D(a_0\rho_0 l^3)^{-1}$; при $k = 1.0$ $V_{\text{кр.фл}} \approx 184D(a_0\rho_0 l^3)^{-1}$; при $k = 10.0$ $V_{\text{кр.фл}} \approx 251D(a_0\rho_0 l^3)^{-1}$ и при $k = 100.0$ $V_{\text{кр.фл}} \approx 293D(a_0\rho_0 l^3)^{-1}$.

Заметим, что при $r \prec 0$ условия (10) имеют место при всех $k \in (0, \infty)$.

Переходя к пределу при $r \to 0$ ($V \to 0$) в уравнении (8), в принятом приближении, получаем следующее уравнение:

$$\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\omega^4 - 4(3\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})\omega^2 + 12 = 0,\ r = 0,\ \tilde{\alpha} \succ 0,\ \tilde{\beta} \succ 0,\ \tilde{\alpha} = \alpha l,\ \tilde{\beta} = \beta l^3, \tag{12}$$

корни которого определяются по формуле

$$(\omega^2)_{1,2} = 2\left((3\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) \pm \sqrt{9\tilde{\alpha}^2 + 3\tilde{\alpha}\tilde{\beta} + \tilde{\beta}^2}\right)\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\beta}^{-1},\ \tilde{\alpha} \succ 0,\ \tilde{\beta} \succ 0. \tag{13}$$

Из выражения (13) очевидно, что $\omega_1^2 \succ 0$, $\omega_2^2 \succ 0$, т.е. при $r = 0$ возмущенное движение пластинки устойчиво для всех $\tilde{\alpha} \succ 0$, $\tilde{\beta} \succ 0$ или для всех $k \in (0, \infty)$.

2. Пусть $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$. Тогда решения уравнений (8) и (12), соответственно, будут вида

$$\omega^2 = \frac{r^3 C(r)}{\beta l^3 B_1(r)} \ \text{ при } \ r \neq 0 \ \text{ и } \ \omega^2 = 3(\beta l^3)^{-1} \ \text{ при } \ r = 0, \tag{14}$$

где $B_1(r)$, $C(r)$ определяются выражениями (9).

Из (14) следует, что при $r \neq 0$ возможна потеря устойчивости только дивергентного типа ($B_1(r) \neq 0,\ r \neq 0$). Критическое значение скорости потока газа, приводящее к потере устойчивости, $V_{\text{кр}0} \approx 6.33D(a_0\rho_0 l^3)^{-1}$. А при $r = 0$ возмущенное движение пластинки устойчиво.

3. Пусть $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$. Тогда решения уравнений (8) и (12), соответственно, примут вид

$$\omega^2 = \frac{rC(r)}{\alpha l B_2(r)} \ \text{ при } \ r \neq 0 \ \text{ и } \ \omega^2 = (\alpha l)^{-1} \ \text{ при } \ r = 0, \tag{15}$$

где $B_2(r)$, $C(r)$ определяются выражениями (9).

Из (15) следует, что при $r \neq 0$ условие $C(r) = 0$ определяет неустойчивость дивергентного типа, к которой приводит критическое значение скорости потока $V_{\text{кр}0} \approx 6.33D(a_0\rho_0 l^3)^{-1}$. Условие $B_2(r) = 0$ определяет неустойчивость флаттерного типа. При этом критическое значение скорости потока $V_{\text{кр.фл}} \approx 27.54D(a_0\rho_0 l^3)^{-1}$, что примерно на порядок меньше критического значения скорости потока при $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $k \geq 0.08$. При $r = 0$ возмущенное движение пластинки устойчиво.

Заметим, что этот частный случай подробно изложен в работах [1] и [2], при исследовании задач (1), (2) и (1), (3) соответственно.

4. С целью сравнения приводится решение аналогичных задач в случае распределенной массы.

Уравнение изгибных колебаний удлиненной пластинки в предположении гипотезы Кирхгофа имеет вид

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0,\quad w=w(x,t), \tag{16}$$

где ρ — плотность материала пластинки.

Исследуем уравнение (16) при следующих граничных условиях:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0,\ x=0;\quad w=\frac{\partial w}{\partial x}=0,\ x=l; \tag{17}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0,\ x=0;\quad w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0,\ x=l. \tag{18}$$

Дисперсионные уравнения для приведенных задач (16), (17) и (16), (18) следующие:

$$\cos\beta l\cdot ch\beta l=-1 \ \text{ и } \quad \cos\beta l\cdot ch\beta l=0$$

соответственно, их решения совпадают при $\beta l\succ\succ 1$. Следовательно, решения задач (16), (17) и (16), (18) совпадают при $\beta l\succ\succ 1$.

Дополнение. Нетрудно показать, что рассматриваемые задачи (1), (2) и (1), (3) не являются самосопряженными, несмотря на то, что решения соответствующих задач на собственные значения совпадают.

В самом деле, сопряженной к задаче (1), (2) является задача, определяемая соотношениями

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-s^3\frac{\partial w}{\partial x}=0,\ w=w(x,t),\ s^3=a_0\rho_0 VD^{-1}; \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\alpha\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2},\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=-\beta\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+s^3 w,\ x=0;$$

$$w=\frac{\partial w}{\partial x}=0,\ x=l.$$

А сопряженной к задаче (1), (3) является задача, определяемая соотношениями

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-s^3\frac{\partial w}{\partial x}=0,\ w=w(x,t),\ s^3=a_0\rho_0 VD^{-1}; \tag{20}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = -\beta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + s^3 w,\ x = 0;$$

$$w = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\alpha \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2},\ x = l.$$

Все эти четыре задачи: (1) и (2), (1) и (3), (19), (20) имеют одни и те же собственные значения.

Институт механики НАН РА

М. В. Белубекян, С. Р. Мартиросян

Об одном неожиданном совпадении в задаче устойчивости пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа

Рассмотрена задача устойчивости пластинки в сверхзвуковом потоке газа при различных граничных условиях. Установлено совпадение собственных значений в случаях различных несамосопряженных задач.

Մ. Վ. Բելուբեկյան, Ս. Ռ. Մարտիրոսյան

Գազի գերձայնային հոսքում գտնվող սալի կայունության խնդրի մի անսպասելի համընկնման մասին

Դիտարկված է բարակ սալի կայունությունը գերձայնային հոսքում տարբեր եզրային պայմանների դեպքում: Ապացուցված է, որ դիտարկված ոչ համալուծ խնդիրներում սեփական արժեքները համընկնում են:

M. V. Belubekyan, S. R. Martirosyan

On Coincidense in Flutter Problem of a Plate in a Supersonic Flow

The paper is devoted to the analysis of stability of a thin plate in a supersonic air flow under the different boundary conditions. The obtained result is the coincidence of eigen-values for the considered non self-adjoint boundary value problems.

Литература

1. *Белубекян М.В., Геворкян С.Х., Самра Г.А.* - Тр. V-ой междунар. конф. "Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред". Ереван. 2005. С. 88-92.

2. *Мартиросян С.Р.* - Тр. междунар. конф. "Актуальные проблемы механики сплошной среды", посвященной 95-летию академика НАН Армении Н.Х. Арутюняна. Ереван. 2007. С. 262-266.

3. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи упругой устойчивости. М. Физматгиз. 1961. 340 с.

4. *Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем. М. Наука. 1979. 384 с.

5. *Вольмир А.С.* Устойчивость упругих систем. М. Физматгиз. 1963. 880 с.