ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 108 2008 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

А. М. Джрбашян

О суммируемых с квадратом классах Неванлинны — Джрбашяна

(Представлено академиком В.С. Захаряном 9/VI 2008)

Ключевые слова: *субгармонические функции, ортогональное разложение, факторизация*

1. Введение. Результаты данной статьи в некотором смысле продолжают ряд исследований М. М. Джрбашяна, открывших путь к общей теории факторизации функций, мероморфных в единичном круге комплексной плоскости [1-4]. Отметим, что М. Г. Крейном многократно была поставлена проблема применения этой теории и других результатов М. М. Джрбашяна в теории операторов, что важно для развития теории операторов, и некоторые приложения результатов [3], вместе с теорией автора в комплексной полуплоскости, даны в [6, 7].

Более точно, результаты данной статьи являются продолжением работы автора [8], которая, в частности, развивает ранние результаты М. М. Джрбашяна [1,2], относящиеся к анализу некоторых пространств и классов регулярных функций, определенных посредством дробного интеграла Римана — Лиувилля. А именно, пространств A^p_α, $\alpha > -1$, $p \geq 1$ (или $H_p(\alpha)$ в первоначальном обозначении) функций $f(z)$, голоморфных в $|z| < 1$, определенных условием

$$\iint_{|\zeta|<1}(1-|\zeta|)^\alpha|f(\zeta)|^p d\sigma(\zeta) = \sup_{0<r<1}\int_0^1(1-t)^\alpha t dt\int_0^{2\pi}|f(tre^{i\vartheta})|^p d\vartheta < +\infty$$

(где $\sigma(\zeta)$ — мера Лебега по поверхности), а также неванлинновских классов функций $f(z)$, мероморфных в $|z| < 1$ (см. [9], пункт 216), определенных условием

$$\int_0^1(1-r)^\alpha T(r,f)dr = \sup_{0<r<1}\int_0^1(1-t)^\alpha T(rt,f)dt < +\infty, \quad \alpha > -1, \tag{1}$$

где $T(r,f)$ — неванлинновская характеристика роста. Отметим, что для функций $f(z)$, голоморфных в $|z|<1$, условие (1) эквивалентно

$$\iint_{|z|<1} \big|\log|f(z)|\big|(1-|z|)^{\alpha} d\sigma(z) < +\infty. \tag{2}$$

В отличие от отмеченных работ, здесь рассматриваются некоторые классы функций $u(z)$, субгармонических в $|z|<1$ (которые, в частности, могут быть $\log|f(z)|$ с голоморфной в $|z|<1$ функцией $f(z)$), *квадраты* которых суммируемы как в (2) *с некоторым общим весом*, и объединение рассматриваемых классов совпадает со множеством *всех функций, субгармонических в* $|z|<1$.

2. Классы субгармонических функций, суммируемых с квадратом. Всюду будем полагать, что $\omega(x) \in \Omega_{N^2}$, т.е. $\omega(x)$ непрерывно дифференцируемая в $[0,1)$, строго убывающая, вещественная функция такая, что $\omega(0)=1$, $\omega(1)=\omega(1-0)=0$ и $|\omega'(x)|$ строго убывает в $[0,1)$. Далее, класс N^2_ω вводим как множество тех функций $u(z)$, субгармонических в $|z|<1$, которые принадлежат лебеговому пространству L^2_ω, рассмотренному в [8], т.е.

$$\|u\|^2_{L^2_\omega} = \frac{1}{2\pi}\iint_{|z|<1} \big[u(z)\big]^2 d\mu_\omega(z) < +\infty, \tag{3}$$

где $d\mu_\omega(re^{i\vartheta}) = -d\vartheta d\omega(r^2)$. Отметим сначала, что верно

Предложение. *Объединение классов* N^2_ω *по всем* $\omega(x)\in\Omega_{N^2}$ *совпадает со множеством всех функций, субгармонических в* $|z|<1$.

Полагая, что $d_0 \in (0,1)$ — фиксированное число, рассмотрим потенциал Грина с обычными факторами Бляшке и ограниченной в $|\zeta| \le d_0$ борелевской мерой $\nu(\zeta)$:

$$G_0(z) = \iint_{|\zeta|<d_0} \log|b(z,\zeta)|\,d\nu(\zeta), \quad b(\lambda,\zeta) = \frac{\zeta-\lambda}{1-\lambda\bar{\zeta}}\frac{|\zeta|}{\zeta}.$$

Очевидно, что $G_0(z) \in N^2_\omega$. Тем самым, образовав $G_0(z)$ посредством риссовской ассоциированной меры функции $u(z)\in N^2_\omega$, заключаем, что субгармоническая функция $u_0(z) = u(z) - G_0(z)$ вновь принадлежит N^2_ω. Основываясь на этом, всюду будем полагать, что риссовская ассоциированная мера функции $u(z)\in N^2_\omega$ такова, что

$$\inf\big\{|\zeta| : \zeta \in \operatorname{supp}\,\nu\big\} \ge d_0,$$

где $d_0 \in (0,1)$ — фиксированное число, и это не повлияет на общность приводимых рассуждений.

Далее, легко видеть, что $L^2_\omega \in L^1_\omega$ при любом $\omega(t)\in\Omega_{N^2}$. Тем самым, из вложения $u(z)\in N^2_\omega$ следует также, что $u(z)\in L^1_\omega$. Поэтому по теореме 4.3 работы [8] ассоциированная мера функции $u(z)$ удовлетворяет условию плотности

$$\iint_{|\zeta|<1} \left(\int_{|\zeta|^2}^{1} \omega(t)dt \right) d\nu(\zeta) < +\infty, \tag{4}$$

и имеет место представление типа Рисса

$$u(z) = G(z) + U(z), \quad |z| < 1, \tag{5}$$

где

$$G(z) = \iint_{|\zeta|<1} \log |b_\omega(z,\zeta)| d\nu(\zeta)$$

— потенциал типа Грина, образованный посредством факторов типа Бляшке $b_\omega(z,\zeta)$, введенных в [8]. В силу (4) этот потенциал сходится в $|z| < 1$ и интеграл

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta|<1} u(\zeta) \mathrm{Re} \left\{ C_\omega(z\overline{\zeta}) \right\} d\mu_\omega(\zeta) - u(0) \\ &= \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta|<1} \left[u(\zeta) - \frac{u(0)}{2} \right] \mathrm{Re} \left\{ C_\omega(z\overline{\zeta}) \right\} d\mu_\omega(\zeta), \end{aligned}$$

где

$$C_\omega(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z}{\Delta_k}, \quad \Delta_k = -\int_0^1 t^k d\omega(t)$$

— ядро типа Коши М. М. Джрбашяна, равномерно сходится и представляет гармоническую функцию в $|z| < 1$.

Отметим, что представление (5) присуще классу функций, более широкому, чем N^2_ω. Тем самым, вложение $u(z) \in N^2_\omega$ влечет дополнительные ограничения. В частности, имеют место нижеприводимые две теоремы.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения:*

1°. *Оба слагаемых $G(z)$ и $U(z)$ представления (5) функции $u(z) \in N^2_\omega$ $(\omega \in \Omega_{N^2})$ принадлежат N^2_ω.*

2°. *Оператор*

$$Q_\omega u(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta|<1} \left[u(\zeta) - \frac{u(0)}{2} \right] \mathrm{Re} \left\{ C_\omega(z\overline{\zeta}) \right\} d\mu_\omega(\zeta), \quad |z| < 1,$$

единичный на множестве гармонических функций из N^2_ω и переводит любой потенциал типа Грина $G(z) \in N^2_\omega$ в тождественный ноль.

3°. *Если $U(z) \in N^2_\omega$, то функция $U(z) - U(0)$ ортогональна любому потенциалу типа Грина $G(z) \in N^2_\omega$ в L^2_ω.*

Теорема 2. *Если* $\nu(\zeta)$ — *неотрицательная борелевская мера в* $|\zeta| < 1$, *удовлетворяющая* (4) *с каким-либо* $\omega(x) \in \Omega_{N^2}$, *то*

$$\|G\|^2_{L^2_\omega} = \iint_{|\zeta|<1} \iint_{|\zeta'|<1} \big(\log|b_\omega(z,\zeta)|, \log|b_\omega(z,\zeta')|\big)_\omega \, d\nu(\zeta) d\nu(\zeta'), \tag{6}$$

где левая и правая части конечны или бесконечны одновременно.

В силу теорем 1 и 2 класс N^2_ω совпадает со множеством всех субгармонических в $|z| < 1$ функций $u(z)$, представимых в виде (5), где $U(z)$ — гармоническая функция класса N^2_ω, а $G(z)$ — сходящийся потенциал типа Грина с риссовской мерой, для которой выражение (6) конечно. Отметим, что, пользуясь формулами работы [8], можно точно вычислить скалярное произведение в этом выражении. Это приводит к условию плотности для меры $d\nu(\zeta)d\nu(\zeta')$, учитывающему аргументы ζ и ζ'.

Институт математики НАН РА
armen_jerbashian@yahoo.com

А. М. Джрбашян

О суммируемых с квадратом классах Неванлинны — Джрбашяна

Рассмотрены произвольно широкие классы субгармонических функций, суммируемых с квадратом по единичному кругу комплексной плоскости с радиальным весом. Доказано, что любая функция из такого класса представима в виде суммы некоторого потенциала типа Грина и интеграла типа Пуассона, которые оказываются ортогональными в соответствующем лебеговом пространстве L^2_ω. Полученные представления в частном случае переходят в факторизации для любых функций, голоморфных в единичном круге.

Ա. Մ. Ջրբաշյան

Նևանլիննա — Ջրբաշյանի քառակուսով ինտեգրելի դասերի մասին

Դիտարկված են կոմպլեքս հարթության միավոր շրջանի մակերեսով՝ քառակուսով, ռադիալ կշռով ինտեգրելի սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների կամայապես լայն դասեր: Ապացուցված է, որ դիտարկվող դասի ցանկացած ֆունկցիա ներկայացնելի է որպես Գրինի տիպի պոտենցիալի ու Պուասսոնի տիպի ինտեգրալի գումար, եւ այդ գումարելիները, ինչպես պարզվում է, օրթոգոնալ են համապատասխան լեբեգյան L^2_ω փարածության մեջ: Սփացված ներկայացումները մասնավոր

դեպքում վերածվում են ֆակտորիզացիաների՝ միավոր շրջանում հոլոմորֆ բոլոր ֆունկցիաների համար:

A. M. Jerbashian

On Nevanlinna — Djrbashian Square Summable Classes

The paper considers arbitrarily wide classes of subharmonic functions which are square summable over the unit disc of the complex plane with a radial weight. It is proved that any function from a considered class is representable as a sum of a Green type potential and a Poisson type integral, and these summands turn to be orthogonal in a suitable Lebesgue space L^2_ω. In particular, the obtained representations become factorizations for all functions holomorphic in the unit disc.

Литература

1. *Джрбашян М. М.* - ДАН АрмССР. 1945. Т. 3. N1. С. 3-9.

2. *Джрбашян М. М.* - Сообщ. Ин-та мех. и мат. АН АрмССР. 1948. Т. 2. С. 3-40.

3. *Djrbashian M. M.* In: Proceedings of the ICM, Vancouver, B.C., 1974. V. 2. 1975. P. 197-202.

4. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* Классы и граничные свойства функций, мероморфных в круге. М. Наука. 1993.

5. *Лившиц М. С.* - ДАН СССР. 1974. Т. 219. С. 793-796.

6. *Gubreev G. M., Jerbashian A. M.* - Journal of Operator Theory. 1991. V. 26. P. 155-190.

7. *Jerbashian A. M.* Functions of α-Bounded Type in the Half-Plane. Springer. 2005.

8. *Jerbashian A. M.* - Complex Variables. 2005. V. 50. P. 155-183.

9. *Nevanlinna R.* Eindeutige Analytische Funktionen. Berlin. Springer. 1936.