ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 108 2008 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517.512.7

М. А. Налбандян

О некоторых подсистемах системы Уолша

(Представлено чл.-кор. НАН РА Г.Г. Геворкяном 8/V 2008)

Ключевые слова: *система Уолша, представление измеримых функций, теоремы представлений, подсистемы ортонормальных систем, спектр функции, спектр Меньшова, двойные ряды*

В работе излагаются результаты, относящиеся к представлениям почти всюду конечных измеримых функций как простыми, так и двойными рядами по подсистемам системы Уолша специального вида.

Вопросам представлений функций рядами по классическим системам посвящено весьма большое количество работ, с содержанием которых можно ознакомиться по работам [1-10], а также по библиографии в этих работах. Здесь упомянем лишь те немногие результаты, содержание которых близко к теоремам, доказанным в настоящей работе. Однако, прежде чем перейти к этому, напомним определение системы Уолша.

Функции системы Уолша $\{w_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ в нумерации Пэли [11-13] определяются так:

$$w_0(t) = 1, \quad w_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1, & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases},$$

$$w_{2^k}(t) = w_1(2^k t).$$

Для некоторого натурального q: $q = \sum\limits_{i=0}^{\infty} q_i 2^i$, где $q_i = 0, 1$, определим

$$w_q(t) = \prod_{i=0}^{\infty} (w_{2^i}(t))^{q_i}.$$

Напомним также, что, следуя А.А.Талаляну, систему $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, ($\varphi_n \in S, n = 1, 2, ...$) мы называем системой представления в классе S ($S \subset L^0$, где L^0 — класс измеримых, почти везде конечных функций) в смысле сходимости по мере, почти всюду, в метрике S (если, конечно, в S установлена метрика), если для каждой функции $f \in S$ существует ряд вида $\sum\limits_n a_n\varphi_n$, который сходится к f соответственно по мере, почти всюду, в метрике S.

В теории представлений функций системами классическим является доказанный в 1940 г. Меньшовым [1] результат, согласно которому тригонометрическая система является системой представления в классе почти везде конечных на $[0, 2\pi]$ измеримых функций в смысле сходимости п.в. на $[0, 2\pi]$.

Здесь весьма интересна постановка вопроса, является ли некоторая подсистема, полученная удалением бесконечного числа членов из системы представления, также системой представления. Особый интерес представляют подсистемы с разряженным спектром (т.е. в которых осталось "очень мало", по сравнению с изначальной системой, членов после удаления), а также подсистемы с особой конфигурацией спектра.

Как примеры вышесказанному приведем следующие результаты.

В 1980 г. в работе [6] Григорян доказал, что:

а) существует плотности нуль последовательность натуральных чисел $\{m_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \left\{2^{N_s^2} \cdot i + l_s, i \le N_s, s \ge 1\right\}$, где N_s — некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел, а $\{l_s\}_{s=1}^{\infty} = \{0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, \dots, 0, 1, 2, \dots, k, \dots\}$ — такая, что подсистема $\{w_{m_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ системы Уолша является системой представления в классе $L^p[0,1], p \in (0,1)$ в смысле сходимости в метрике $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$;

б) если подсистема системы Уолша содержит бесконечное число множеств функций вида $\{w_m(x)\}_{m=M_{2l-1}}^{M_{2l}}$, где M_k — произвольная последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая $\overline{\lim\limits_{l\to\infty}}[M_{2l} - M_{2l-1}] = +\infty$, то она является системой представления в классе $L^p[0,1], p \in (0,1)$.

В 1985 г. Арутюнян [9] доказал для той же последовательности M_k, что тригонометрическая подсистема $\{e^{\pm 2\pi m x i}, m \in [M_{2l-1}, M_{2l}], l \ge 1\}$ является системой представления в классе почти везде конечных измеримых функций в смысле сходимости п.в. на $[0,1]$.

В 2003 г. Козьмой и Олевским [10] для тригонометрических систем установлено, что для любой, стремящейся к бесконечности последовательности $w(k)$ существует симметричный спектр Меньшова

$$\Lambda = \left\{\pm k^2 + o(w(k))\right\}_{k \in \mathrm{N}},$$

т.е. каждая почти везде конечная измеримая функция f допускает представление

$$f(x) = \sum_{n\in\Lambda} c_n(f)e^{inx},$$

где ряд сходится п.в.

Для системы Уолша автором получены следующие теоремы:

Теорема 1. *Для произвольного* $l \in \left\{2^k\right\}_{k=0}^{\infty}$ *существует подсистема* $\{w_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $n_k \in \{k^l + o(k^{l-1})\}_{k\in\mathrm{N}}$, *системы Уолша такая, что для любой почти везде конечной измеримой функции существует сходящийся к ней ряд п.в. по подсистеме* $\{w_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Теорема 2. *Для любой, стремящейся к бесконечности последовательности* $\{\omega(k)\}_{k=1}^{\infty}$ *существует подсистема* $\{w_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $n_k \in \{k^2+o(\omega(k))\}_{k\in\mathrm{N}}$, *системы Уолша такая, что для любой почти везде конечной измеримой функции существует сходящийся к ней ряд п.в. по подсистеме* $\{w_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Оказываются верными двумерные аналоги данных теорем, которые составляют содержание настоящей работы. Однако, перед тем как сформулировать их, считаем полезным отметить, что ряд классических результатов (например, теоремы Карлесона [14], Рисса [15], Колмогорова [16]) невозможно распространить на двумерный случай (см. Фефферман [17], Конягин [18]).

Теорема 3. *Для произвольного* $l \in \left\{2^k\right\}_{k=0}^{\infty}$ *существует множество натуральных чисел* $\{n_s\}_{s=1}^{\infty} \subset \{k^l + o(k^{l-1})\}_{k\in\mathrm{N}}$ *такое, что для любой почти везде конечной измеримой функции* $f(x,y)$, *определенной на* $[0,1]\times[0,1]$, *существует двойной ряд вида*

$$\sum_{s,i=1}^{\infty} c_{i,s} w_{n_s}(x) w_{n_i}(y),$$

который по Прингсхейму сходится к ней п.в. на $[0,1]\times[0,1]$.

Теорема 4. *Для любой, стремящейся к бесконечности последовательности* $\{\omega(k)\}_{k=1}^{\infty}$ *существует множество натуральных чисел* $\{n_s\}_{s=1}^{\infty} \subset \{k^2 + o(\omega(k))\}_{k\in\mathrm{N}}$ *такое, что для любой почти везде конечной измеримой функции* $f(x,y)$, *определенной на* $[0,1]\times[0,1]$, *существует двойной ряд вида*

$$\sum_{s,i=1}^{\infty} c_{i,s} w_{n_s}(x) w_{n_i}(y),$$

который по Прингсхейму сходится к ней п.в. на $[0,1]\times[0,1]$.

Приведем схему доказательства теоремы 1.

Для понимания смысла основной леммы, на которую опирается доказательство теоремы, нам понадобится определение следующих множеств:

$$\begin{aligned} B_1(a,s) &= \{a, 2a, \dots, sa\}, \quad a = 2^N, N \in \mathrm{N}; \\ B_2(a,s) &= \bigcup_{k=0}^{s} \left(k + B_1(2^{(k+1)s}a, s)\right); \\ B(a,s) &= B_2(a,s) + B_1(2^{(s+1)^2}a, s), \end{aligned}$$

где $a + A = \{a + x : x \in A\}$, $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$.

Отметим также, что под $spec\{P\}$ мы понимаем множество тех натуральных чисел k, для которых w_k содержится в полиноме P.

Лемма 1. *Для произвольных положительных ε, δ, $a = 2^N, N \in \mathrm{N}$ и $f \in L^0$ найдется $S = S(f, \varepsilon, \delta)$ со следующим свойством: для заданного $s > S$ можно построить полином по системе Уолша, удовлетворяющий условиям:*

1) $m\{t : |P - f| > \delta\} < \varepsilon$,

2) $spec\{P\} \subset B(a,s)$,

3) $m\{t : |S^*(P,t)| > 6\varepsilon^{-1}(|f(t)| + \delta)\} < \varepsilon$.

Лемма 2. *Для произвольного натурального $l \geq 3$ имеет место включение*

$$\Lambda_l = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(a^l(i) + B\left(la^{l-1}(i), i\right)\right) \subset \left\{n^l + o(n^{l-1})\right\}_{n \in \mathrm{N}}$$

при $a(i) = 2^{l(i+2)^2}$.

Лемма 3. *Для произвольной стремящейся к бесконечности последовательности $\{\omega(k)\}_{k=1}^{\infty}$ можно найти соответствующую последовательность $\{a(i)\}_{i=1}^{\infty}$ так, чтобы*

$$\Lambda_2' = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(a^2(i) + B\left(2a(i), i\right)\right) \subset \left\{n^2 + o(\omega(n))\right\}_{n \in \mathrm{N}}.$$

Лемма 4. *Для последовательности $\{i_k\}_{k=1}^{n}$ такой, что $0 \leqslant i_1, i_k + 1 \leqslant i_{k+1}$, произведение $\Pi_n(t) = [1 - w_{2^{i_1}}(t)] \dots [1 - w_{2^{i_n}}(t)]$ обладает следующим свойством: оно равно 2^n на множестве меры $\dfrac{1}{2^n}$ и нулю — в остальных местах, причем множество ненулевых значений представляет собой объединение двоичных интервалов длиной $\dfrac{1}{2 \cdot 2^{i_n}}$ каждый.*

Для $f \in L^0$ по индукции строятся полиномы так, что $\sum P_n$ сходится к f. Полиномы $P_1, \dots, P_{n-1}$, по построению, должны удовлетворять следующим условиям:

1) $spec\{P_i\} \subset B(la_i^{l-1}, s_i) + a_i^l, i < n$, для $l \in \{2^k\}_{k=2}^{\infty}$;

2) $B(la_i^{l-1}, s_i) + a_i^l \subset \{n^l + o(n^{l-1})\}_{n \in \mathbf{N}}$;

3) спектры этих полиномов не пересекаются.

Определим

$$F_n = f - \sum_{k=1}^{n-1} P_k,$$

$\varepsilon_n = 2^{-n}$, $\delta_n = 16^{-n}$ и $S_n = S\left(F_n, \varepsilon_n, \delta_n\right)$.

Положим $s_n \geq \max\{S_n, s_{n-1}\} + 1$, $a_n = 2^{l(s_n+2)^2}$.

Далее, пусть $P_n^1(t)$ — полином, найденный по лемме 1 для значений $\varepsilon_n, \delta_n, s_n, la_n^{l-1}$. Окончательно определим $P_n(t) = w_{a_n^l}(t)P_n^1(t)$, где полином выбирается по лемме 1 так, что $spec\{P_n^1(t)\} \subset B(la_n^{l-1}, s_n)$.

Легко видеть, что первый и третий пункты индукционного предложения выполняются для новополученного полинома. Справедливость второго пункта следует из более общего утверждения леммы 2.

Доказательство сходимости таким образом полученного ряда существенным образом опирается на лемму 4, чем и завершается доказательство теоремы 1.

Выражаю глубокую благодарность М.Г.Григоряну за постановку задач, советы и моральную поддержку, присутствие которой я постоянно ощущал при работе.

Ереванский государственный университет

М. А. Налбандян

О некоторых подсистемах системы Уолша

Доказаны два следующих утверждения:

1) для произвольного $l \in \{2^k\}_{k=0}^{\infty}$ существует множество натуральных чисел $\{n_s\}_{s=1}^{\infty} \subset \{k^l + o(k^{l-1})\}_{k \in \mathbf{N}}$;

2) для любой, стремящейся к бесконечности последовательности $\{\omega(k)\}_{k=1}^{\infty}$ существует множество натуральных чисел $\{n_s\}_{s=1}^{\infty} \subset \{k^2 + o(\omega(k))\}_{k \in \mathbf{N}}$.

Эти множества обладают тем свойством, что что для любой почти везде конечной измеримой функции $f(x, y)$, определенной на $[0, 1] \times [0, 1]$, существует двойной ряд вида

$$\sum_{s,i=1}^{\infty} c_{i,s} w_{n_s}(x) w_{n_i}(y),$$

который по Прингсхейму сходится к ней п.в. на $[0,1]\times[0,1]$.

Մ. Ա. Նալբանդյան

Ուոլշի համակարգի որոշ ենթահամակարգերի մասին

Ապացուցված են հետևյալ երկու պնդումները՛

1. Ցանկացած $l \in \{2^k\}_{k=0}^{\infty}$ -ի համար գոյություն ունի բնական թվերի բազմություն $\{n_s\}_{s=1}^{\infty} \subset \{k^l + o(k^{l-1})\}_{k\in\mathrm{N}}$;

2. Ցանկացած անվերջի ձգտող $\{\omega(k)\}_{k=1}^{\infty}$ հաջորդականության համար գոյություն ունի բնական թվերի բազմություն $\{n_s\}_{s=1}^{\infty} \subset \{k^2 + o(\omega(k))\}_{k\in\mathrm{N}}$:

Այդ երկու բազմությունները օժտված են այն հատկությամբ, որ ցանկացած համարյա ամենուրեք վերջավոր, չափելի, $[0,1]\times[0,1]$-ում որոշված $f(x,y)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի կրկնակի շարք

$$\sum_{s,i=1}^{\infty} c_{i,s} w_{n_s}(x) w_{n_i}(y),$$

որը զուգամիտում է ըստ Պրինգսհեյմի այդ ֆունկցիային h.ա. $[0,1]\times[0,1]$-ում:

M. A. Nalbandyan

About Some Subsystems of the Walsh's System

The following two results are obtained:

1) For any $l \in \{2^k\}_{k=0}^{\infty}$ there exists the set of natural numbers $\{n_s\}_{s=1}^{\infty} \subset \{k^l + o(k^{l-1})\}_{k\in\mathrm{N}}$;

2) For any sequence $\{\omega(k)\}_{k=1}^{\infty}$ which tends to infinity there exits the set of natural numbers $\{n_s\}_{s=1}^{\infty} \subset \{k^2 + o(\omega(k))\}_{k\in\mathrm{N}}$.

Both of these sets are such that for any almost everywhere finite measurable function $f(x,y)$, defined on $[0,1]\times[0,1]$, there exists double series

$$\sum_{s,i=1}^{\infty} c_{i,s} w_{n_s}(x) w_{n_i}(y)$$

which converges to it by Pringsheim a.e. on $[0,1]\times[0,1]$.

Литература

1. *Меньшов Д.Е.* - Матем. сб. 1941. Т. 9. N51. С. 667-692.

2. *Ульянов П.Л.* - Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1971. Т. 112. N1. С. 372-384.

3. *Талалян А.А.* - УМН. 1960. Т. 15. N5. С. 77-141.

4. *Кротов В.Г.* - Изв. АН СССР. Сер. мат. 1977. Т. 41. N1. С. 215-236.

5. *Иванов В.И.* - Тр. Междунар. конф. по теории прибл. функций (Киев, 1983) М. Наука. 1987. С. 186-187.

6. *Григорян М.Г.* Представление функций класса $L^p, p > 1$. Канд. дис. Ереван. 1980.

7. *Grigorian M.G.* - Analysis Math. 1991. V. 17. P. 211-237.

8. *Григорян М.Г.* - Изв. вузов. Математика. 1990. N11. С. 9-18.

9. *Арутюнян Ф.Г.* - Матем. сб. 1985. Т. 126. N2. С. 267-285.

10. *Kozma G., Olevskii A.* - J. Anal. Math. 2001. V. 84. P. 361-393.

11. *Walsh J.L.* - Amer. J. Math. 1923. V. 45. P. 5-24.

12. *Paley R.E.A.C.* - Proc. London. Math. Soc. 1932. V. 34. P. 241-279.

13. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша. М. Наука. 1987.

14. *Carleson L.* - Acta Math. 1966. V. 116. P. 135-167.

15. *Riesz M.* - Math. Zeit. 1927. V. 27. P. 218-244.

16. *Kolmogorov A.N.* - FM. 1925. V. 7. P. 23-28.

17. *Fefferman C.* - Ann. Math. 1971. V. 94. N2. P. 330-336.