ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 108 2008 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517

К. А. Керян

Об ограниченности норм проекторов на пространство периодических сплайнов третьего порядка

(Представлено чл.-кор. НАН РА Г.Г. Геворкяном 25/IV 2008)

Ключевые слова: *базис, ортогональный проектор, сплайн, норма оператора*

Для $k > 1$ и разбиения

$$\pi = \pi_N = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_{N-1} < t_N = 1\}$$

через $P_k(\pi)$ обозначим множество функций, определенных на $[0, 1]$, которые являются полиномами степени не выше $k - 1$ на каждом отрезке $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, ...N$. Для целых чисел $k > m > 0$ и разбиения π обозначим

$$S_{k,m}(\pi) = P_k(\pi) \cap C^{m-1}[0, 1], \qquad S_k(\pi) = S_{k,k-1}(\pi)$$

пространство всех сплайнов порядка k (т.е. степени $< k$), с узлами из π. Пусть $\pi^{(k)} = \{t_i\}_{i=-k+1}^{N+k-1}$, где

$$0 = t_{-k+1} = ... = t_0 < t_1 < ... < t_{N-1} < t_N = ... = t_{N+k-1} = 1.$$

Тогда через $\{N_i\}_{i=-k+1}^{N-1}$ обозначим B-сплайны степени k с узлами из π, т.е.

$$N_i(x) = ([t_{i+1}, ..., t_{i+k}] - [t_i, ..., t_{i+k-1}])(\cdot - x)_+^{k-1}.$$

Известно, что они образуют разложение единицы, т.е.

$$\sum_{i=-k+1}^{N-1} N_i(x) = 1, \quad \text{для} \quad x \in [0, 1].$$

Функции N_i, нормированные в L_1, обозначим через $N_{i,1}$, т.е. $N_{i,1} = N_i/\|N_i\|_1$.

В работах о проекторах $P_{\pi,k,m}$ из пространства $L^\infty[0,1]$ на $S_{k,m}(\pi)$ для разных k и m оцениваются нормы операторов $P_{\pi,k,m}$.

Оценки этих норм в некоторых работах зависят от π. Например, в [1-4] от π требовалась квазиравномерность: $\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{\min}} \le M$ или подобное условие, где $\lambda_i = |[t_{i-1}, t_i]| = t_i - t_{i-1}$, для $1 \le i \le N$. В [3] на π налагалось условие квази-геометричности, т.е. $\frac{\lambda_{i\pm1}}{\lambda_i} < 1+\varepsilon_k$. В работах [5-8] длины отрезков $[t_i, t_{i+1}]$ должны были составлять геометрическую прогрессию, т.е. $\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} = \rho$, где $\rho > 0$. Другая группа теорем была доказана при $k = 2, 3, 4$ или $m = 1, 2, 3$ (см. [3, 9-12]). В этих работах оценка нормы оператора $P_{\pi,k,m}$ не зависит от π. В большинстве из цитированных статей важную роль играла следующая лемма, доказанная де Боором в [14]:

Лемма 1. *Для всех π, k имеет место*

$$\|P_{\pi,k}\|_{L_\infty} \le \|G^{-1}\|_{l_\infty},$$

где матрица $G = (N_{i,1}, N_j)_{i,j=-k+1}^{N-1}$.

В [14] также доказанно, что матрица Грамма системы N_i вполне неотрицательна, т.е. все алгебраические дополнения неотрицательны, откуда также следует не менее важное свойство обратной матрицы: она знакопеременна.

Наконец, в 2001 г. Щадрин [13] дал положительный ответ на гипотезу де Боора, выдвинутую в 1972 г., доказав следующую теорему.

Теорема 1. *Для любого разбиения $\pi = \{0 < t_0 < t_1 < ... < t_{N-1} < t_N = 1\}$ и для любого натурального числа $k \ge 2$ существует постоянная $C_k > 0$, не зависящая от π такая, что для любой функции $f \in C(0,1)$*

$$\|P_{\pi,k}(f)\|_C \le C_k \|f\|_C,$$

где $P_{\pi,k} = P_{\pi,k,k-1}$ проектор из $C(0,1)$ в пространство сплайнов порядка k и с узлами из π.

Достойна внимания также следующая лемма из [14], которая наряду с вышеупомянутой леммой 1 была использована Щадриным в [13] для доказательства теоремы 1.

Лемма 2. *Пусть H^{-1} является знакопеременной матрицей, и пусть $a, b \in \mathbf{R}^N$ такие векторы, что $Ha = b$ и*

(a_1) $(-1)^i \mathrm{sign}\, b_i = \mathrm{const}$ *для всех* i;

(a_2) $\min_i |b_i| \ge c_{\min}$;

(a_3) $\|a\|_\infty \le c_{\max}$.

Тогда

$$\|H^{-1}\|_\infty \le \frac{c_{\max}}{c_{\min}}.$$

Отметим, что для $k = 2$ G является строго диагонально-доминирующей матрицей (т.е. $|a_{i,i}| \ge \rho \sum_{j;j\ne i} |a_{i,j}|$, где $\rho > 1$ постоянная), и Чисельский прямой оценкой получил, что

$$\|G^{-1}\|_\infty \le 3.$$

В периодическом случае эта оценка остается верной, как и строго диагонально-доминируемость матрицы Грамма. Но при $k > 2$ ни в непериодическом, ни в периодическом случае подавно G и G^{-1} не сохраняют эти свойства. Более того, при $k > 2$ в периодическом случае матрица Грамма не сохраняет свойство вполне неотрицательности, а G^{-1} уже не знакопеременна, что означает, что мы не можем воспользоваться леммой 2.

В настоящей работе доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Для любого разбиения $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_{N-1} < t_N = 1\}$ существует постоянная $C_2 > 0$, не зависящая от π такая, что для любой функции $f \in C(0,1)$*

$$\|P_\pi(f)\|_C \le C_2 \|f\|_C,$$

где P_π проектор из $C(0,1)$ в пространство периодических сплайнов третьего порядка с узлами из π.

Допустим, что π есть разбиение отрезка $[0,1]$:

$$\pi = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_{N-1} < t_N = 1\}.$$

Функцию $f : [0,1] \mapsto R$ назовем периодическим сплайном 3-го порядка с узлами из π, если на каждом из отрезков (t_i, t_{i+1}), $0 \le i < N$, она является полиномом не выше второй степени, непрерывно дифференцируема на $[0,1]$, а также имеют место $f(0) = f(1), f'(0) = f'(1)$. Через S_π обозначим пространство всех периодических сплайнов 3-го порядка с узлами из π. Через λ_i обозначим длину интервала $[t_{i-1}, t_i]$ для $1 \le i \le N$, а также условимся, что $\lambda_{Nk+i} = \lambda_i$ для всех $k \in Z$ и $1 \le i \le N$ и что $f(t_{Nk+i}) = f(t_i)$ для всех $f \in S_\pi$.

В линейном пространстве S_π существует натуральный базис$\{N_i(t)\}_{i=0}^{N-1}$, который однозначно определяется следующими условиями:

$$N_i(t) \in C^1[0,1], \quad N_i'(t_{i-1}) = \frac{2}{\lambda_i + \lambda_{i-1}}, \quad N_i'(t_i) = -\frac{2}{\lambda_i + \lambda_{i+1}} \tag{1}$$

$$\text{и} \quad N_i(t_j) = N_i'(t_j) = 0 \quad \text{для} \quad j \ne i \quad \text{и} \quad i-1.$$

Нетрудно увидеть, что функции N_i обладают также следующими свойствами:

$$N_i(t_{i-1}) = \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_{i-1} + \lambda_i}, \quad N_i(t_i) = \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_{i+1} + \lambda_i}, \tag{2}$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} N_i(t) \equiv 1 \quad \text{для} \quad t \in [0,1] \tag{3}$$

и

$$\operatorname{supp} N_i = [t_{i-2}, t_{i+1}] \quad \text{для} \quad 0 \le i \le N-1. \tag{4}$$

При $-N < i < 0 \le j \le N$ под записью $[t_i, t_j]$ будем понимать объединение интервалов $[t_{i+N}, 1]$ и $[0, t_j]$, например $\operatorname{supp} N_0 = [t_{-2}, t_1] = [t_{N-2}, 1] \cup [0, t_1]$.

От системы $\{N_i\}_{i=0}^{N-1}$ перейдем к некой системе $\{M_i\}_{i=0}^{N-1}$ так, чтобы последняя система также была базисом в S_π и для нее выполнялось неравенство $(M_i, M_i) > (M_i, M_{i-2} + M_{i-1} + M_{i+1} + M_{i+2}) + c(M_i, 1)$, с некоторой постоянной $c > 0$. Отметим, что для системы $\{N_i\}_{i=0}^{N-1}$ не имеет места аналогичное неравенство.

Для этого введем следующую вспомогательную функцию:

$$f_0(t) = \begin{cases} 1 + 0.2t \quad \text{при} \quad 0 \le t \le 1, \\ \\ (1 + 0.2/t)(3t+2)/(2t+3) \quad \text{при} \quad 1 < t \le 100, \\ \\ (1 + 0.2/t)(\frac{3t+2}{2t+3} + a\frac{t-100}{t}) \quad \text{при} \quad 100 < t, \end{cases}$$

где $a = 0.005$.

Нетрудно заметить, что

$$1 \le f_0(t) \le 2.$$

С помощью функции $f_0(t)$ введем систему функций $\{M_i\}_{i=0}^{N-1}$ следующим образом:

$$M_i(t) = f_0(\tau_i) N_i(t), \ \text{для} \quad 0 \le i \le N-1,$$

где $\tau_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1} + \lambda_{i+1}}$.
При таком выборе системы функций $\{M_i\}_{i=0}^{N-1}$ имеет место следующая лемма (доказательство которой мы не будем приводить), с помощью которой мы с легкостью докажем теорему 2.

Основная лемма. *Существует постоянная $c > 0$, для которой имеет место неравенство*

$$(M_i, M_i) > (M_i, M_{i-2} + M_{i-1} + M_{i+1} + M_{i+2}) + c(M_i, 1). \tag{5}$$

Доказательство теоремы 2. Убедимся, что нормы проекторов $P_\pi : C[0,1] \mapsto S_\pi$ являются ограниченными числом, не зависящим от π.
Допустим, что $f \in C[0,1]$ и $P_\pi f(t) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i M_i(t)$. Отсюда имеем, что

$$(P_\pi f, M_j) = (f, M_j), \quad \text{для} \quad 0 \le j \le N-1. \tag{6}$$

Пусть j выбрано так, чтобы $|a_j| = \max_{0 \le i \le N-1} |a_i|$, отсюда, применив (5), получим

$$|(P_\pi f, M_j)| >$$

$$|a_j|\left((M_j, M_j) - (M_j, M_{j-2} + M_{j-1} + M_{j+1} + M_{j+2})\right) > c|a_j|(M_j, 1). \qquad (7)$$

С другой стороны, так как $M_j(t) \geq 0$ для всех t и j, то

$$|(f, M_j)| \leq \|f\|_C (M_j, 1).$$

Из последнего неравенства, а также из (6), (7) вытекает, что

$$|a_j| \leq \frac{1}{c}\|f\|_C.$$

Для завершения доказательства нам остается заметить, что из (3) имеем

$$\|P_\pi f\|_C = \max_{t\in[0,1]} |P_\pi f(t)| \leq \max_{t\in[0,1]} \sum_{i=0}^{N-1} |a_i| M_i(t) \leq 2|a_j| \sum_{i=0}^{N-1} N_i(t) = 2|a_j|.$$

Теорема 2 доказана.

Институт математики НАН РА

К. А. Керян

Об ограниченности норм проекторов на пространство периодических сплайнов третьего порядка

Доказывается, что проекторы, действующие из пространства непрерывных функций на пространство периодических сплайнов третьего порядка, рассматриваемые как операторы из $C[0,1]$ в $C[0,1]$, имеют равномерно ограниченные нормы.

Կ. Ա. Քեռյան

Երրորդ կարգի պարբերական սպլայնների փարածության վրա պրոյեկտորների նորմերի սահմանափակության վերաբերյալ

Ցույց է տրված, որ պրոյեկտորները, որոնք գործում են անընդհատ ֆունկցիաների տարածությունից երրորդ կարգի պարբերական սպլայնների տարածության վրա, ունեն հավասարաչափ սահմանափակ նորմեր:

K. A. Keryan

About Boundedness of Projector Operators onto the Space of Periodic Splines of Order Three

It is proved that the norms of orthogonal projectors from the space of continuous functions onto the space of periodic splines of order three, are uniformly bounded.

Литература

1. *Domsta J.* - Studia Math. 1972. V. 41. P. 291-314.

2. *Douglas J., Dupont T., Wahlbin L.* - Math. Comp. 1975. V. 29. P. 475-483.

3. *Boor C., de.* In: Theory of Approximation with Applications (Calgary, AB, 1975). New York. Academic Press. 1976. P. 120-145.

4. *Demko S.* - SIAM J. Numer. Anal. 1977. V. 14. P. 616-619.

5. *Feng Y. Y., Kozak J.* - J. Approx. Theory. 1981. V. 32. P. 327-338.

6. *Hollig K.* - J. Approx. Theory. 1981. V. 33. P. 318-333.

7. *Mityagin B.* - Math. Comp. 1983. V. 40. P. 283-300.

8. *Jia R.* - Math. Comp. 1987. V. 48. P. 675-690.

9. *Ciesielski Z.* - Studia Math. 1963. V. 23. P. 141-157.

10. *Boor C., de.* - J. Approx. Theory. 1968. V. 1. P. 452-463.

11. *Boor C., de.* In: Approximation and Function Spaces (Gdansk, 1979). North-Holland, Amsterdam — New York. 1981. P. 163-175.

12. *Сматраков Н., Субботин Ю. Н.* - Труды Мат. ин-та им. Стеклова. 1983. Т. 164. С.75-99.

13. *Shadrin A. Yu.* - Acta Math. 2001. V. 187. P. 59-137.

14. *Boor C., de.* - J. Approx. Theory. 1968. V. 1. P. 452-463.