ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 108 2008 №2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

Академик С. А. Амбарцумян, М. В. Белубекян

К задаче осевого растяжения круговой цилиндрической оболочки

(Представлено 20/XII 2007)

Ключевые слова: *цилиндрическая оболочка, осевое растяжение, устойчивость*

Рассматривается задача осевого растяжения неоднородной круговой цилинрической оболочки с учетом поперечного сдвига [1-6]. Указываются возможности потери локальной устойчивости при осевом растяжении.

1. Пусть неоднородная трансверсально-изотропная (модуль упругости $-$ $E = E(s)$, модуль поперечного сдвига $-$ $G' = G'(s)$, коэффициенты $-$ ν_i постоянные) круговая цилиндрическая оболочка (радиус кривизны $-$ R, толщина $-$ h, длина $-$ l) растягивается продольными усилиями T_0, равномерно распределенными по торцам оболочки $s = 0$, $s = l$. Срединная поверхность определяется параметрами: радиуса кривизны $R_s = \infty$, $R_\beta = R$, коэффициентами квадратичной формы $-$ $A = B = 1$, координатами s, β, γ.

Для рассматриваемой осесимметричной задачи предполагаются [4, 5]: а) нормальные напряжения σ_γ пренебрежимо малы; б) нормальное перемещение по толщине оболочки остается постоянным $u_\gamma = w(s)$; в) поперечное касательное напряжение по толщине оболочки изменяется по заданному закону

$$\tau_{s\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \gamma^2\right)\varphi(s), \tag{1.1}$$

$\varphi(s)$ $-$ искомая функция.

Для напряжений имеем [4, 5]

$$\begin{gathered}\sigma_s = B(e_s + \nu e_\beta),\ \sigma_\beta = B(e_\beta + \nu e_s),\ B = \frac{E(s)}{1-\nu^2},\\ \tau_{s\beta} = 0,\ \tau_{\beta\gamma} = 0,\ \tau_{s\gamma} = B_{55} e_{s\gamma},\ B_{55} = \frac{1}{a_{55}(s)} = G'(s).\end{gathered} \tag{1.2}$$

Для компонент деформаций имеем

$$e_s = \frac{du_s}{ds},\ e_\beta = \frac{u_\gamma}{R} = \frac{w}{R},$$
$$e_{s\gamma} = \frac{du_s}{d\gamma} + \frac{du_\gamma}{ds} = \frac{du_s}{d\gamma} + \frac{dw}{ds}, \tag{1.3}$$

$u_s(s,\gamma)$, $u_\gamma = w(s)$, $u_\beta = 0$ — компоненты перемещения.

Поступая обычным образом [1-5], получим

$$u_s = u - \gamma\frac{dw}{ds} + \gamma\frac{a_{ss}}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{\gamma^2}{3}\right)\varphi, \tag{1.4}$$

$u = u(s)$ — продольное перемещение срединной поверхности.

2. Для расчетных напряжений наряду с (2.1) имеем также

$$\sigma_s = B\left[\frac{du}{ds} - \gamma\frac{d^2w}{ds^2} + \gamma\frac{w}{R} + \frac{\gamma}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{\gamma^2}{3}\right)\left(a_{55}\frac{d\varphi}{ds} + \frac{da_{55}}{ds}\varphi\right)\right],$$
$$\sigma_\beta = B\left[\frac{w}{R} + \nu\frac{du}{ds} - \gamma\nu\frac{d^2w}{ds^2} + \nu\frac{\gamma}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{\gamma^2}{3}\right)\left(a_{55}\frac{d\varphi}{ds} + \frac{da_{55}}{ds}\varphi\right)\right]. \tag{2.2}$$

Далее согласно известным процедурам [1-5] для внутренних усилий и моментов получим

$$T_s = C\left(\frac{du}{ds} + \nu\frac{w}{R}\right),\ T_\beta = C\left(\frac{w}{R} + \nu\frac{du}{ds}\right),$$
$$M_s = -D\frac{d^2w}{ds^2} + \frac{Dh^2}{10}\left(a_{55}\frac{d\varphi}{ds} + \frac{da_{55}}{ds}\varphi\right), \tag{2.3}$$
$$M_\beta = \nu M_s,\ N = \frac{h^3}{12}\varphi,\ C = Bh,\ D = \frac{Bh^3}{12}.$$

Уравнения равновесия в усилиях и моментах имеют вид

$$\frac{dT_s}{ds} = 0,\ \frac{dN}{ds} - \frac{T_\beta}{R} = 0,\ \frac{dM_s}{ds} - N = 0. \tag{2.4}$$

Граничные условия на торцах оболочки имеют обычную структуру [1-5], в частности,

при заделке: $w = 0$, $\dfrac{dw}{ds} = 0$, $T_s = T_0$,

при шарнирном закреплении:

$$w = 0,\ \frac{d^2w}{ds^2} - \frac{h^2}{10G'}\frac{d\varphi}{ds} = 0,\ T_s = T_0. \tag{2.5}$$

Очевидно в рассматриваемой задаче $T_s = T_0$, тогда согласно (2.3)-(2.5) для T_β имеем

$$T_\beta = Eh\frac{w}{R} + \nu T_0 \ \text{ или } \ T_\beta = \frac{h^3R}{12}\frac{d\varphi}{ds}. \tag{2.6}$$

На это мы обращаем внимание, так как это имеет особое значение для установления явления потери локальной устойчивости растянутой оболочки.

3. Подставляя значения T_s, T_β, N, M_s из (2.3) в уравнения равновесия (2.4), после элементарных преобразований получим следующую систему дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами $E(s)$, a_{55}, $D(s)$:

$$\begin{gathered}\frac{d^3w}{ds^3}+\frac{1}{D}\frac{dD}{ds}\frac{d^2w}{ds^2}-\frac{h^2}{10}a_{55}\frac{d^2\varphi}{ds^2}-\frac{h^2}{10}\left(2\frac{da_{55}}{ds}+\frac{1}{D}\frac{dD}{ds}a_{55}\right)\frac{d\varphi}{ds}-\\ -\frac{h^2}{10}\left(\frac{d^2a_{55}}{ds^2}+\frac{1}{D}\frac{dD}{ds}\frac{da_{55}}{ds}-\frac{5}{6}\frac{h}{D}\right)\varphi=0,\\ \frac{d\varphi}{ds}-\frac{12E}{h^2R^2}w=\frac{12\nu}{Rh^3}T_0.\end{gathered} \tag{3.1}$$

В частности, полагая $E=E_0e^{k_1s}$, $G'=G_0e^{k_2s}$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{d^3w}{ds^3}+k_1\frac{d^2w}{ds^2}-\frac{h^2e^{-k_2s}}{10G_0}\frac{d^2\varphi}{ds^2}+\frac{h^2(2k_2-k_1)e^{-k_2s}}{10G_0}\frac{d\varphi}{ds}+\\ +\frac{h^2k_2(k_2-k_1)e^{-k_2s}}{10G_0}\varphi+\frac{(1-\nu^2)e^{-k_1s}}{E_0}\varphi=0,\\ \frac{d\varphi}{ds}-\frac{12E_0e^{k_1s}}{h^2R^2}w=\frac{12\nu T_0}{Rh^3}.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Далее, полагая $k_1=k_2=k$, получим следующее дифференциальное уравнение относительно искомой $\varphi(s)$ с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^4\varphi}{ds^4}-2k\frac{d^3\varphi}{ds^3}+\left(k^2+\frac{6E_0}{5R^2G_0}\right)\frac{d^2\varphi}{ds^2}-k\left(k^2-\frac{6E_0}{5R^2G_0}\right)\frac{d\varphi}{ds}+\frac{12(1-\nu^2)}{h^2R^2}\varphi=0, \tag{3.3}$$

а также

$$w=-\frac{\nu RT_0e^{-ks}}{E_0h}+\frac{h^2R^2e^{-ks}}{12E_0}\frac{d\varphi}{ds}. \tag{3.4}$$

4. Рассмотрим частный случай однородной оболочки ($k_1=0$, $k_2=0$, индекс "0" опускаем у E_0, $G_0=G'$). В этом случае система дифференциальных уравнений (3.1) перепишется следующим образом:

$$\begin{gathered}\frac{d^3w}{ds^3}-\frac{h^2}{10}a_{55}\frac{d^2\varphi}{ds^2}+\frac{h^3}{12D}\varphi=0,\ a_{55}=\frac{1}{G'},\\ \frac{d\varphi}{ds}-\frac{12E}{h^2R^2}w=\frac{12\nu T_0}{Rh^3},\ D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.\end{gathered} \tag{4.1}$$

Из системы (4.1), исключая φ, получим

$$\frac{d^4w}{ds^4}-\frac{6a_{55}E}{5R^2}\frac{d^2w}{ds^2}+\frac{Eh}{R^2D}w=-\frac{\nu T_0}{RD}. \tag{4.2}$$

Общее решение уравнения (4.2) имеет вид

$$w = e^{-p_1 s}(C_1 \sin p_2 s + C_2 \cos p_2 s) + e^{-p_1 s}(C_3 \sin p_2 s + C_3 \cos p_2 s) - \frac{\nu R T_0}{Eh}, \tag{4.3}$$

где частное решение переписано из решения задачи по безмоментной теории

$$\begin{gathered} w = -\frac{\nu R T_0}{Eh},\ \sigma_s = \frac{T_0}{h},\ \sigma_\beta = 0, \\ \frac{du}{ds} = \frac{T_0}{C} - \nu\frac{w}{R},\ C = Eh, \end{gathered} \tag{4.4}$$

C_i — постоянные интегрирования, p_i — корни характеристического уравнения

$$p^4 - 2\xi p^2 + 4\chi^4 = 0, \tag{4.5}$$

где

$$\xi = \frac{3}{5}\frac{E}{R^2 G'},\ \chi^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{R^2 h^2}. \tag{4.6}$$

Решение биквадратного уравнения (4.5) имеет вид $p^2 = \beta\xi \pm i\sqrt{4\chi^4 - \xi^2}$, или

$$p = \pm(p_1 \pm i p_2),\ p_1 = \sqrt{\chi^2 + 0.5\xi},\ p_2 = \sqrt{\chi^2 - 0.5\xi}. \tag{4.7}$$

5. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние оболочки вблизи торца $s = 0$. Согласно (4.3) решение уравнения (4.2) в окрестности $s = 0$ (оболочка достаточно длинная [4]) имеет вид

$$w \approx (C_1 \sin p_2 s + C_2 \cos p_2 s)e^{-p_1 s} - \frac{\nu R T_0}{Eh}. \tag{5.1}$$

Пусть на рассматриваемом торце $(s = 0)$ заданы следующие граничные условия:

$$w = 0,\ \frac{dw}{ds} = 0,\ T_s = T_0. \tag{5.2}$$

Определив постоянные C_i, для нормального перемещения получим

$$w = -\frac{\nu R T_0}{Eh}\left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\sin p_2 s + \cos p_2 s\right)e^{-p_1 s}\right]. \tag{5.3}$$

Согласно (5.3), с помощью формул (2.3)-(2.5), для внутренних усилий, моментов и продольного перемещения получим

$$\begin{aligned} & T_s = T_0,\ T_\beta = \nu T_0\left(\frac{p_1}{p_2}\sin p_2 s + \cos p_2 s\right)e^{-p_1 s},\ M_\beta = \nu M_s, \\ & M_s = \frac{\nu h T_0}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}p_2}[p_2(1-\xi)\cos p_2 s - p_1(1+\xi)\sin p_2 s]e^{-p_1 s}, \\ & N = \frac{h^3}{12}\varphi,\ \xi = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{3}{(1-\nu^2)}}\frac{Eh}{RG'}, \\ & \frac{d\varphi}{ds} = \frac{12\nu T_0}{Rh^3}\left(\frac{p_1}{p_2}\sin p_2 s + \cos p_2 s\right)e^{-p_1 s}, \\ & \frac{du}{ds} = \frac{T_0}{Eh}\left[1 - \nu^2\left(\frac{p_1}{p_2}\sin p_2 s + \cos p_2 s\right)e^{-p_1 s}\right]. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Здесь нетрудно заметить, что T_β знакопеременная. Без учета деформаций сдвига ($G' = \infty$) для T_φ получим

$$T_\beta = \nu T_0(\sin\chi s + \cos\chi s)e^{-\chi s}. \tag{5.5}$$

Первый от закрепленного края интервал, где T_β принимает отрицательное значение, определяется следующим образом:

$$\frac{3\pi}{4} < \chi s < \frac{7\pi}{4}, \tag{5.6}$$

т. е. при растяжении оболочки усилиями T_0 появляются отрицательные усилия T_β, которые, вообще говоря, могут привести к локальной потере устойчивости оболочки по несимметричной форме. Минимальное значение T_β в интервале (5.6) имеет место при

$$\chi s = \frac{3\pi}{2} \quad \text{или} \quad s = \frac{3\pi\sqrt{Rh}}{2\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \tag{5.7}$$

и принимает значение

$$\min T_\beta \approx -0.009\nu T_0. \tag{5.8}$$

Сжимающее усилие T_β существенно меньше растягивающего, что делает потерю устойчивости маловероятной. Значения T_β в интервалах, расположенных дальше от края, чем интервал (5.6), будут мало отличаться от нуля в силу наличия множителя $\exp(-\chi)$. О качественном влиянии поперечных сдвигов на T_β можно судить, рассматривая предельный случай, когда $\xi \to 2\chi^2$. В этом случае $p_1 = \sqrt{2}\chi$, $p_2 = 0$, а для T_β из (5.5) получим

$$T_\beta = \nu T_0(1 + \sqrt{2}\chi)e^{-\sqrt{2}\chi}. \tag{5.9}$$

В этом случае T_β уже всюду положительное. Т. е. учет поперечных сдвигов приводит к уменьшению влияния отрицательных усилий T_β на напряженно-деформированное состояние оболочки, оболочка становится более стабильной.

Пусть теперь на рассматриваемом торце $s = 0$ имеем условия шарнирного закрепления

$$w = 0,\ \frac{d^2 w}{ds^2} - \frac{h^2}{10G'}\frac{d\varphi}{ds} = 0,\ T_s = T_0. \tag{5.10}$$

В этом случае для нормального перемещения получим

$$w = -\frac{\nu R T_0}{Eh}\left[1 + \left(\frac{47\xi}{50p_1p_2}\sin p_2 s - \cos p_2 s\right)\right]e^{-p_1 s}, \tag{5.11}$$

а для окружного усилия —

$$T_\beta = \nu T_0\left(\cos p_2 s - \frac{47\xi}{50p_1p_2}\sin p_2 s\right)e^{-p_1 s}. \tag{5.12}$$

Очевидно, и в этом случае функция T_β — знакопеременная.

При пренебрежении поперечными сдвигами ($\xi = 0$) первый от торца интервал отрицательных значений T_β определяется таким образом:

$$0.5\pi < \chi s < 1.5\pi. \tag{5.13}$$

В этом случае минимальное значение для T_β получается при $\chi s = 0.75\pi$ и равно

$$\min T_\beta \approx -0.064\nu T_0. \tag{5.14}$$

Сравнивая (5.8) и (5.14), замечаем, что при шарнирном закреплении торца оболочки потеря устойчивости становится более вероятной, чем при жестком закреплении.

6. Для оценки влияния знакопеременного усилия T_β на локальную устойчивость оболочки при шарнирном закреплении рассмотрим модельную задачу. Пусть круговая цилиндрическая оболочка длиной L равномерно растягивается вдоль образующих усилием T_0. На оболочку действует также постоянное сжимающее усилие T_β, определяемое по формуле (5.14). В этом случае, полагая, что по образующей имеется только одна мода, т.е. $m = 1$, согласно [5] критическая сила определяется следующей формулой:

$$\frac{T_0}{EL}\left(0.064\nu - \frac{\pi^2 R}{n^2 L}\right) = \frac{n^2 h^2}{12(1-\nu^2)R^2} + \frac{\pi^4 R^4}{n^6 L^4}. \tag{6.1}$$

Отсюда следует, что оболочка может потерять устойчивость при условии

$$0.064\nu - \frac{\pi^2 R}{n^2 L} > 0. \tag{6.2}$$

Условие (6.2) выполняется при больших n. В частности, например: если $\nu = 0.5$, $L = R$, то $n > 17$ или если $L = \pi^2 R$, $\nu = 0.5$, то $n > 5$ и т.д.

Для больших n и при условии (6.2) критическую нагрузку согласно (6.1) можно определять по формуле

$$T_0 = \frac{ELn^2}{12(1-\nu^2)}\frac{h^2}{R^2}\left(0.064\nu - \frac{\pi^2 R}{n^2 L}\right)^{-1}. \tag{6.3}$$

Из равенства нулю производной выражения (6.3) по n^2 определим n, при котором T_0 достигает минимума.

$$n^2 = \frac{\pi^2 R}{0.032\nu L}. \tag{6.4}$$

Подставляя (6.4) в (6.3), получим минимальное значение критической нагрузки

$$\frac{T_{kp}}{Eh} = \frac{\pi^2 h}{12(1-\nu^2)(0.032\nu)^2 R}. \tag{6.5}$$

Очевидно, все эти явления будут более ярко выражены при неоднородных оболочках с учетом поперечных сдвигов $(E(s), G'(s))$.

7. Полученные здесь результаты могут быть использованы при рассмотрении напряженно-деформированного состояния чрезвычайно тонких оболочек, встречающихся при реализации некоторых нанотехнических процессов. В этих случаях полезно также обратить внимание на микрополярные явления.

Институт механики НАН РА

Академик С. А. Амбарцумян, М. В. Белубекян

К задаче осевого растяжения круговой цилиндрической оболочки

Рассматривается задача осевого растяжения неоднородной круговой цилиндрической оболочки с учетом поперечного сдвига. Указываются возможности потери локальной устойчивости при осевом растяжении.

Ակադեմիկոս Ս. Ա. Համբարձումյան, Մ. Վ. Բելուբեկյան

Շրջանաձեւ գլանային թաղանթի առանցքային ձգման խնդրի մասին

Հոդվածում դիփարկվում է անհամասեռ շրջանաձեւ գլանային թաղանթի առանցքային ձգման խնդիրը` լայնական սահքերի հաշվառմամբ: Ցույց է փրված թաղանթի փեղական անկայունության հնարավորությունը:

Academician S.A. Ambartsumian, M.V. Belubekyan

On the Problem of the Axial Stretch of Circular Cylindrical Shell

The problem of axial stretch of the nonhomogeneous circular cylindrical shell taking into account the transverse shear is considered. The possibility of the localized instability in the case of the axial stretching is decided.

Литература

1. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М. Изд-во. физ.-мат. лит. 1963. 635 с.

2. *Флюгге В.* Статика и динамика оболочек. М. Гос. изд-во по стр., архит. и строймат. 1961. 306 с.

3. *Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я.* Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. Киев. Академпериодика. 2006. 472 с.

4. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных оболочек. М. Изд-во. физ.-мат. лит. 1961. 384 с.

5. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. М. Наука. 1974. 446 с.

6. *Пикуль В.В.* - Докл. РАН. 2007. Т. 416. N3. С. 341-343.