ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 108 2008 №2

МАТЕМАТИКА

УДК 519.217

А. Р. Мартиросян, И. Э. Даниелян

Аппроксимация критических рисков в страховых портфелях

(Представлено академиком В.С. Захаряном 10/III 2008)

Ключевые слова: *риски, страхование, предельные законы, критическая загрузка, страховой портфель*

1. Введение. В страховых компаниях "риски" принимают значения из R^1. Ниже рассмотрена модель, учитывающая договоры со страховыми сделками и связанные с пожизненной рентой. Страховая сумма за $(0,t]$ представима в виде $S(t) = \sum\limits_{0\le t_i \le t} X_i \cdot X_i$ независимы, одинаково распределены с функцией распределения (ФР) $F(x)$, $x \in R^1$ и с конечным средним $a \cdot t_i$ $-$ моменты наступления страховых случаев, $t_i - t_{i-1}$ независимы с ФР $1-e^{-\lambda x}$, $x \ge 0$, $\lambda > 0$, $t_0 = 0$. $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ независимы. Обозначим $\zeta(t) = S(t) - ct$, $t \ge 0$, где c $-$ интенсивность страховых выплат. Риск оценивают ФР $W(t,x) = P\{r(t) \le x\}$ и $W(x) = P\{r \le x\}$, где $r(t) = \sup\limits_{0\le u\le t} \zeta(u)$, $r = r(+\infty)$. Оценку критических рисков производим при условиях:

1. Для $\psi(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{isx} dF(x)$ верно представление $\psi(s) - 1 - ais \sim -AC_\gamma |s|^\gamma L(1/|s|)$, $s \to 0$, где $A > 0$, $1 < \gamma \le 2$, $C_\gamma = e^{\pm\frac{\pi i(\gamma-2)}{2}}$, а $L > 0$ медленно меняется на бесконечности. $\psi(s) - 1 - ais \sim As^2$, $s \to 0$, где $A = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 F(x) < +\infty$ при $\gamma = 2$.

2. Средние суммарные выплаты $\rho_1 = \lambda a \in R^1$ находятся в критической ситуации, т. е. $\rho_1 \to c$. Полагаем, что $c\rho_1 > 0$, и под $\rho = |\rho_1 - c| \to 0$ понимаем либо $\rho_1 \downarrow c$, либо $\rho_1 \uparrow c$.

Информация. Пусть $M(x,\nu) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\nu u} P\{\zeta(u) > x\} u^{-1} du$, $M(x) = M(x,0)$, $A(s,\nu) = \exp\left\{-\int\limits_0^{\infty} e^{-sx} d_x M(x,\nu)\right\}$, $A(s) = A(s,0)$, $\Omega(t,s) = \int\limits_0^{\infty} e^{-sx} d_x W(t,x)$, $\Omega(s) =$

$\Omega(\infty,s)$, $x \ge 0$, $t \ge 0$, $\nu \ge 0$, $Re(s) \ge 0$, тогда $\chi(\nu,s) = \nu \int\limits_0^\infty e^{-\nu t}\Omega(t,s)dt = A(s,\nu)\begin{cases} 1, & c \ge 0 \\ (\lambda+\nu)/(\lambda+\nu-cs), & c \le 0 \end{cases}$, $Re(s) \ge 0$, $0 < \nu < \infty$; известно также, что $W(x) \equiv 0$ при $\rho_1 > c$, а при $\rho_1 < c$ $\Omega(s) = A(s)\begin{cases} 1, & c \ge 0 \\ \lambda/(\lambda - cs), & c \le 0 \end{cases}$ (см. [1]). Положим $\hat{C}(\nu) = \int\limits_0^\infty d_x M(x,\nu)$, $\hat{C} = \hat{C}(0)$, $C^0(\nu) = \lim\limits_{\rho\to 0}\hat{C}(\nu)$ и $C^0 = \lim\limits_{\rho\to 0}\hat{C}$. Тогда $A(s,\nu) = \exp\left\{-\int\limits_0^\infty (e^{-sx}-1)d_x M(x,\nu) - \hat{C}(\nu)\right\}$, $0 < \nu < \infty$, $Re(s) \ge 0$. Ясно, что $W(\infty) = e^{-\hat{C}}$, т.е. $e^{\hat{C}}W(x)$ — собственная ФР.

Цель. При условиях 1, 2 получить предельные теоремы для нормированных рисков при согласованном стремлении $\rho \to 0$ и $t \to +\infty$. В работе получены предельные теоремы для критических рисков.

2. Результаты. Пусть $B = \lambda A$ и $L_2^{(\alpha)}(t) = (t^{-\alpha}/M^{(\alpha)}(t))$, $\alpha > 0$, $t \ge 0$, где $M^{(\alpha)}(t)$ — обратная к $t^\alpha/L(t)$ функция (см. [2]). При $(\rho/B)\underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0$ пишем $\omega \sim (\rho/B)^{1/(\gamma-1)}L_2^{(\gamma-1)}(B/\rho)$ для величин порядка правой части эквивалентности. При нормировке $\theta(\rho)\underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0$ нужен порядок совместного с $\rho \to 0$ стремления $t \to +\infty$. Обозначим $\delta(\tau) = \tau\,\mathrm{sign}(c-\rho_1)$ и $\hat{\alpha}(\rho) = \rho\theta(\rho)$ при $\theta(\rho) = o(\omega)$ или $\theta(\rho) \sim \omega$, $\delta(\tau) = 0$ и $\hat{\alpha}(\rho) = B(\theta(\rho))^\gamma L(1/\theta(\rho))$ при $\omega = o(\theta(\rho))$. Пусть $p(x,\alpha,\varphi)$ — плотность устойчивого закона с характеристической функцией (ХФ) $\exp\{-|s|^\alpha \exp\{\pm(\pi i\varphi)/2\}\}$, $0 < \alpha \le 2$ (см. [3,4]), $\Phi_\tau(x) = \tau^{-1/\gamma}\int\limits_{-\infty}^x p(u\tau^{-1/\gamma},\gamma,\gamma-2)du$, $x \in R^1$, $\tau \in R^+$ и $E_y(x)$ — ФР с единичным скачком в точке y.

Теорема 1. *Пусть $\theta(\rho) \to 0$ и $t \to +\infty$ так, что $t\hat{\alpha}(\rho) \to \tau$, $\tau \in [0,+\infty]$. Существует предел $\lim P\{\theta(\rho)\zeta(t) \le x\} = \Phi(\tau,x)$, $x \in R^1$. Здесь: $\Phi(0,x) = E_0(x)$; $\Phi(+\infty,x) \equiv 0$; $\Phi(\tau,x) = E_{-\delta(\tau)}(x)$ при $\theta(\rho) = o(\omega)$; $\Phi(\tau,x) = \Phi_\tau(x-\delta(\tau))$ при $\theta(\rho) \sim \omega$ или $\omega = o(\theta(\rho))$, а $0 < \tau < +\infty$.*

Пусть $\Delta(s) \ge 0$, $\Delta(0) = 0$ и $\nabla(s) \ge 1$, $\nabla(0) = 1$ — единственные решения уравнений $x^\gamma + x = s$ и $x^\gamma - x = s$, $1 < \gamma \le 2$, $s \ge 0$ (см. [5,6]). $\Delta(s)$ ($\nabla(s)$) берем при $\rho_1 < c$ ($\rho_1 > c$) и обозначаем $\diamondsuit = \diamondsuit(s)$. Обозначим $\beta(s) = s^{1/\gamma}$ при $\delta(\tau) = 0$; $\beta(s) = \diamondsuit(s)$ при $\delta(\tau) \ne 0$.

Замечание 1. *При $0 < \nu < \infty$, $s \ge 0$, $0 < \tau < +\infty$, $\mu = 0,1$ функция*

$$N(s,\nu,\mu,\tau) \stackrel{def}{=} \exp\left\{-\int\limits_0^\infty (e^{-sx}-1)d_x\left[\int\limits_0^\infty e^{-\nu u\mu}(1-\Phi(\tau u,x))u^{-1}du\right]\right\} = \frac{\beta(\mu\nu/\tau)}{s+\beta(\mu\nu/\tau)}. \qquad (2.1)$$

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 при $0 < \tau < \infty$ существуют пределы* $(\pm = \mathrm{sign}(c))$ $\lim P\{\theta(\rho)r(tu) \le x\} = W_r^\pm(u,x)$, $u \in R^+$, $\lim\limits_{\rho_1 \uparrow c} P\{\theta(\rho)r \le x\} = W_r^\pm(x)$, *где*

$$\nu\int\limits_0^\infty e^{-\nu u}\left\{\int\limits_0^\infty e^{-sx}d_x W_\tau^+(u,x)\right\}du = e^{-C^0}N(s,\nu,1,\tau) \text{ при } 0 < \nu < \infty, s \ge 0; \qquad (2.2)$$

$W_\tau^+(x)$ *определяется из (2.3) и не зависит от* u, *причем с* $\nu = 0$ *и* $\tau = 1$ *справа;*

$$W_\tau^-(u,x) = \begin{cases} W_\tau^+(u,x), & \theta(\rho) = o(-\lambda/c), \\ (1-e^{-x}) * W_\tau^+(u,x), & \theta(\rho) \sim -\lambda/c, \\ 0, & -\lambda/c = o(\theta(\rho)); \end{cases} \tag{2.3}$$

$W_\tau^-(x)$ *определяется из (2.3) с заменой* $W_\tau^\pm(u,x)$ *на* $W_\tau^\pm(x)$, *а* $*$ *— знак свертки.*

Замечание 2. *Пусть* $t = \tau$ *фиксировано и* $\theta(\rho) \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0$. *Тогда*

a) $\Phi(t,x)$, $W_\tau^\pm(x)$, $W_\tau^\pm(u,x)$ *существуют лишь в случае* $\theta(\rho) \sim B^{-1/\gamma} L_2^{(\gamma)}(B)$ *при* $\omega = o(\theta(\rho))$, *причем при* $c \le 0$ *в правой части (2.2) добавляется множитель* $\varepsilon^\pm(\nu,s)$, *где* $\varepsilon^+(\nu,s) = 1$, $\varepsilon^-(\nu,s) = (\lambda_0+\nu)/(\lambda_0+\nu+ps)$, $p = \lim(-c\theta(\rho)) \in [0,\infty]$, $\lambda_0 = \lim \lambda \in [0,\infty]$.

b) $W_\tau^\pm(u,x)$ *определяется из* $\nu \int\limits_0^\infty e^{-\nu u} \left\{ \int\limits_0^\infty e^{-sx} d_x W_\tau^\pm(u,x) \right\} du = e^{-C^0(\nu)} \varepsilon^\pm(\nu,s) N(s,\nu,1,)$.

Опишем ситуацию при $\gamma = 2$. Тогда $\Diamond(s) = (1 \pm \sqrt{4s+1})/2$, где знак $"+"$ ($"-"$) выбирается при функции ∇, (Δ). При $s \ge 0$ обозначим: $\nu^+(s) \equiv 1$; $\nu^-(s) = 1$ при $\theta(\rho) = o(-\lambda/c)$; $\nu^-(s) = (1+s)^{-1}$ при $\theta(\rho) \sim (-\lambda/c)$; $\nu^-(s) \equiv 0$ при $(-\lambda/c) = o(\theta(\rho))$. Пусть $\chi_\tau^\pm(s,\nu) = \nu \int\limits_0^\infty e^{-\nu u} \left\{ \int\limits_0^\infty e^{-sx} d_x W_\tau^\pm(u,x) \right\} du$ и в $\Diamond(s) \pm = \operatorname{sign}(\delta(\bullet))$.

Следствие 1. *В условиях теоремы 1* $\Phi(\tau,x) = E_{-\delta(\tau)}(x)$ *при* $\theta(\rho) = o(\omega)$; $\Phi(\tau,x) = \Phi((x+\delta(\tau))/\sqrt{2\tau})$ *при* $\theta(\rho) \sim \omega$ *или* $\omega = o(\theta(\rho))$, *где* $\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$.

Следствие 2. *В условиях теоремы 2*

$$W_\tau^-(x) = e^{-C^0} \begin{cases} 1 - e^{-x}, & \theta(\rho) \sim \omega = o(-\lambda/c), \\ 1-(1+x)e^{-x}, & \theta(\rho) \sim \omega \sim -\lambda/c, \end{cases}$$

$W_\tau^+(x) = e^{-C^0}(1-e^{-x})$ *при* $\theta(\rho) \sim \omega$; $W_\tau^\pm(x) \equiv 0$ *в остальных случаях.*

Следствие 3. *В условиях теоремы 2*

$$\chi_\tau^\pm(s,\nu) = e^{-C^0} \nu^\pm(s) \begin{cases} 1, & \rho_1 < c, \\ \nu/(\nu+\tau s), & \rho_1 > c, \end{cases} \quad \theta(\rho) = o(\omega);$$

$$\chi_\tau^\pm(s,\nu) = e^{-C^0} \nu^\pm(s) \Diamond(\nu/\tau)/(s + \Diamond(\nu/\tau)),\ \theta(\rho) \sim \omega; \tag{2.4}$$

$$\chi_\tau^\pm(s,\nu) = e^{-C^0} \nu^\pm(s) (\sqrt{\nu}/(\sqrt{\nu} + s\sqrt{\tau})),\ \omega = o(\theta(\rho)). \tag{2.5}$$

Следствие 4. *В условиях теоремы 2 при* $\theta(\rho) = o(\omega)$: $W_\tau^+(u,x) = e^{-C^0} E_0(x)$ *при* $\rho_1 < c$ *и* $W_\tau^+(u,x) = e^{-C^0} E_{\tau u}(x)$ *при* $\rho_1 > c$, *а* $W_\tau^-(u,x)$ *определяется формулой (2.2).*

Следствие 5. *В условиях замечания 2* $\chi_\tau^{\pm}(s,v) = e^{-C^0(\nu)}\varepsilon^{\pm}(\nu,s)(\sqrt{\nu}/(\sqrt{\nu}+s))$ *при* $\gamma = 2$.

Результаты доказаны в приложениях 1 - 3.

Приложение 1. Нетривиальные случаи в (2.1) возникают при $\theta(\rho) \sim \omega$ и $\omega = o(\theta(\rho))$, когда $\Phi'(\tau,x) = \tau^{-1/\gamma}p((x-\delta(\tau))\tau^{-1/\gamma},\gamma,\gamma-2)$. Из $p(-x,\alpha,\varphi) = p(x,\alpha,-\varphi)$ (см. [3]) пишем $\Phi'(\tau,x) = \tau^{-1/\gamma}p(-(x-\delta(\tau))\tau^{-1/\gamma},\gamma,2-\gamma)$. Пусть $\Gamma(\bullet)$ — гамма-функция. В силу формулы (6.9) из [3], (с. 659) при $\varphi = \gamma - 2$ и $\delta(\tau) \neq 0$ из равенства $\sin(\pi n(\gamma-1)/\gamma) = (-1)^{n-1}\sin(\pi n/\gamma)$ выводим $\Phi'(\tau,x) = \frac{1}{\pi\gamma}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-(x-\delta(\tau)))^n}{n!}\Gamma\left(\frac{n+1}{\gamma}\right)\tau^{-\frac{n+1}{\gamma}}\sin\left(\frac{\pi(n+1)}{\gamma}\right)\right] = \frac{\tau}{x}f_{\diamondsuit}(\tau,x)$, $1 < \gamma \leq 2$, где $f_{\diamondsuit}(x,t) = \frac{t}{\gamma\pi x}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(t\pm x)^n}{n!}\Gamma\left(\frac{n+1}{\gamma}\right)x^{-\frac{n+1}{\gamma}}\sin\frac{n+1}{\gamma}\pi$ — плотность с преобразованием Лапласа (ПЛ) $\exp\{-t\diamondsuit(s)\}$ (см. [6]), которая при $\gamma = 2$ приобретает вид $f_{\diamondsuit}(x,t) = \frac{t}{2x\sqrt{\pi x}}e^{-\frac{(t\pm x)^2}{4x}}$. Для $\nabla(s)$ ($\Delta(s)$) выбираем знак $''+''$ $(''-'')$. При $\delta(\tau) = 0$, сравнивая разложения функции $\Phi(\tau,x)$ и $p(x,\gamma^{-1},\gamma^{-1})$ из [3], заключаем: $\Phi'(\tau,x) = \tau x^{-(\gamma+1)}p(\tau x^{-\gamma},\gamma^{-1},-\gamma^{-1})$. Так как плотность $g(x,\tau) = x^{-\gamma}p(\tau x^{-\gamma},\gamma^{-1},-\gamma^{-1})$ имеет ПЛ $e^{-xs^{1/\gamma}}$ (см. [3]), то $\Phi'(\tau,x) = (\tau/x)g(x,\tau)$. Меняя порядок интегрирования в левой части (2.1), получим $N(s,\nu,\mu,\tau) = \exp\left\{\int\limits_0^\infty e^{-\nu u\mu}\left[\int\limits_0^\infty(e^{-sx}-1)\Phi'(\tau u,x)dx\right]u^{-1}du\right\}$. Еще раз меняем порядок интегрирования и делаем замену $z = \tau u$. С учетом полученных связей для Φ' выводим равенство $N(s,\nu,\mu,\tau) = \exp\left\{\int\limits_0^\infty(e^{-sx}-1)x^{-1}\left[\int\limits_0^\infty(e^{-\nu\mu z/\tau}\phi(x,z)dz\right]dx\right\}$. Здесь $\phi(x,z)$ имеет ПЛ $\exp\{-x\beta(s)\}$, где $\beta(s) = \diamondsuit(s)$ либо $\beta(s) = s^{1/\gamma}$. Тогда $N(s,\nu,\mu,\tau) = \exp\left\{\int\limits_0^\infty x^{-1}(e^{-sx}-1)\exp\{-x\beta(\nu\mu/\tau)\}dx\right\}$. К (2.1) приходим с учетом того, что

$$\int\limits_0^\infty x^{-1}(1-e^{-sx})e^{-\mu x}dx = \ln(1+(s/\mu)). \qquad (\Pi.1)$$

Приложение 2. Для $P\{\zeta(t) \leq x\}$ ХФ имеет вид $\exp\{-t\hat{\nu}(s)\}$, где $\hat{\nu}(s) = ics + \lambda(1-\psi(s))$. При $s^* = \theta(\rho)s$ пишем $\hat{\nu}(\theta(\rho)s) = \rho\theta(\rho)\left[\mathrm{sign}(c-\rho_1)is - \lambda(\psi(s^*)-1-ais^*)(\rho\theta(\rho))^{-1}\right]$. Полагая $\hat{b}(s) = \alpha\,\mathrm{sign}(c-\rho_1)is + \beta C_\gamma|s|^\gamma$, где $\alpha = 1$, $\beta = 0$ при $\theta(\rho) = o(\omega)$; $\alpha = \beta = 1$ при $\theta(\rho) \sim \omega$; $\alpha = 0$, $\beta = 1$ при $\omega = o(\theta(\rho))$, приходим к разложению

$$\hat{\nu}(\theta(\rho)s) \sim \hat{\alpha}(\rho)\hat{b}(s),\ \rho \to 0. \qquad (\Pi.2)$$

Докажем теорему 1. Имеем $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{isx}d_xP\{\theta(\rho)\zeta(t) \leq x\} = \exp\{-t\hat{\nu}(s^*)\}$. Существование $\Phi(\tau,x)$ следует из (П.2) и теоремы единственности (см. [7], с. 300). При этом $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{isx}d_x\Phi(\tau,x) = e^{-\tau\hat{b}(s)}$. Для конкретных ФР из формулировки теоремы 1 данное равенство выполнено, откуда и из теоремы единственности следует утверждение. Ясно, что для $\Phi(\tau,x)$ верно замечание 2(a). Докажем теорему 2. Пределы находятся однотипно. Рассмотрим первый. Замена $y = ut$ в $\int\limits_0^\infty e^{-sx} d_x W(ut, (x/\alpha(\rho))) = \Omega(ut, s^*)$ дает $\nu \int\limits_0^\infty e^{-\nu u}\Omega(ut, s^*)du = \chi(\nu/t, s^*)$. При $c \geq 0$ заменой $x = \theta(\rho)u$ в $A(s^*, \nu/t)$ получаем $\chi(\nu/t, s^*) = A(s^*, \nu/t) = e^{-C^0(\nu/t)} \exp\left\{-\int\limits_0^{+\infty}(e^{-sx}-1)d_x M((x/\theta(\rho)), (\nu/t))\right\}$. При $t \sim (\tau/\hat\alpha(\rho))$ заменой $u = yt$ в $M((x/\theta(\rho)), (\nu/t))$ находим $M((x/\theta(\rho)), (\nu/t)) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\nu y} P\{\theta(\rho)\zeta(ty) > x\} y^{-1}dy$. Существование $W_\tau^+(u, x)$ вытекает из теоремы 1 и [8] (с. 695, теорема 1). При $c \leq 0$ (2.4) устанавливаем с помощью равенства $\chi(\nu/t, s^*) = A(s^*, \nu/t)\{1 + (-c\theta(\rho)(\lambda + (\nu/t))^{-1})s\}^{-1}$. Ясно, что для $W_\tau^\pm(u, x)$ верно замечание 2(a). Замечание 2(b) вытекает из следующих соображений. Для существования $W_\tau^\pm(u, x)$ нужно существование предела $m(y, \nu) = \lim\limits_{\rho\to 0} M((y/\theta(\rho)), \nu) = \int\limits_0^\infty e^{-\nu\xi\mu}\xi^{-1}(1 - \Phi(\xi, y))d\xi$, что следует из теоремы 1 и [8] (с. 695, теорема 1). Тогда $\chi_\tau^\pm(s, \nu) = e^{-C^0(\nu)}\varepsilon^\pm(\nu, s)N(s, \nu, 1, 1)$ для $\theta(\rho) \sim B^{-1/\gamma}L_2^{(\gamma)}(B)$ с $\omega = o(\theta(\rho))$.

Приложение 3. При $\gamma = 2$, $\omega \sim (\rho/B)$ и в (П.2) $\hat b(s) = \alpha\,\mathrm{sign}(c-\rho_1)is + \beta s^2$, где $\alpha = 1$, $\beta = 0$ при $\theta(\rho) = o(\omega)$; $\alpha = \beta = 1$ при $\theta(\rho) \sim \omega$; $\alpha = 0$, $\beta = 1$ при $\omega = o(\theta(\rho))$. Далее, в (П.2): $\hat\alpha(\rho) = \rho\theta(\rho)$ при $\theta(\rho) = o(\omega)$ или $\theta(\rho) \sim \omega$; $\hat\alpha(\rho) = B\theta(\rho)^2$ при $\omega = o(\theta(\rho))$.

Следствие 1 легко выводится из теоремы 1. Докажем следствие 2. Имеем $\Omega_0(s) \stackrel{def}{=} \int\limits_0^\infty e^{-sx}dW_\tau^+(x) = e^{-C^0}\exp\left\{\int\limits_0^\infty\left[\int\limits_0^\infty(e^{-sx}-1)d_x\Phi(\tau u, x)\right]u^{-1}du\right\}$. При $\theta(\rho) = o(\omega)$ из расходимости интеграла $\int\limits_0^\infty(1 - e^{-x}x^{-1}dx)$ имеем $W_\tau^+(x) \equiv 0$. При $\omega = o(\theta(\rho))$ или $\theta(\rho) \sim \omega$ $\Omega_0(s) = e^{-C^0}\exp\left\{\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{(e^{-sx}-1)}{2\sqrt{\pi\tau\nu^3}}\exp\left\{-\frac{(x+\delta(\nu\tau))^2}{4\nu\tau}\right\}dxd\nu\right\}$. Меняя порядок интегрирования и делая замену $u = \nu\tau$, получаем $\Omega_0(s) = e^{-C^0}\exp\left\{\int\limits_0^\infty(e^{-sx}-1)\int\limits_0^\infty f(u,\nu)dud\nu\right\}$.

$c \geq 0$. При $\theta(\rho) \sim \omega$ имеем $\delta(u\tau) = u\tau$ ($\rho_1 < c$) и плотность $xf(u, x)$ имеет ПЛ $e^{-x\nabla(s)}$. Из (П.2) получаем $\Omega_0(s) = e^{-C^0}(1+s)^{-1}$. При $\omega = o(\theta(\rho))$ $\frac{x}{\sqrt{2\pi u^3}}e^{\frac{x^2}{2u}}$ плотность ФР $2(1 - \Phi(x/\sqrt{u}))$. Поэтому $xf(u, x)$ имеет ПЛ $e^{-x\sqrt{s}}$. Из расходимости интеграла $\int\limits_0^\infty(1 - e^{-x})x^{-1}dx$ следует $W_\tau^+(x) \equiv 0$.

$c \leq 0$. Отметим лишь, что $(1 - e^{-x}) * (1 - e^{-x}) = 1 - (1 + x)e^{-x}$.

Докажем следствие 3. В случаях $\theta(\rho) \sim \omega$ и $\omega = o(\theta(\rho))$ в (2.2) меняем порядок интегрирования $\chi_\tau^+(s,\nu) = e^{-C^0}\exp\left\{\int\limits_0^\infty e^{-\nu y}\left[\int\limits_0^\infty \frac{(e^{-sx}-1)}{2\sqrt{\pi\tau y^3}}\exp\left\{\frac{(x+\delta(\tau y))^2}{4\tau y}\right\}dx\right]dy\right\}$. Еще раз меняем порядок интегрирования и производим замену $u = \tau y$. $\chi_\tau^+(s,\nu) = e^{-C^0}\exp\left\{\int_0^\infty(e^{-sx}-1)\left[\int\limits_0^\infty e^{-\nu u/\tau}f(u,x)du\right]dx\right\}$. При $\theta(\rho) \sim \omega$ $xf(u,x)$ имеет ПЛ $\exp\{-x\diamondsuit(s)\}$ и $\chi_\tau^+(s,\nu) = e^{-C^0}\exp\left\{\int_0^\infty x^{-1}(e^{-sx}-1)e^{-x\diamondsuit(\nu/\tau)}dx\right\} =$

$e^{-C^0}\frac{\diamondsuit(\nu/\tau)}{s+\diamondsuit(\nu/\tau)}$ (см. (2.4)). $xf(u,x)$ имеет ПЛ $e^{-x\sqrt{s}}$ при $\omega = o(\theta\rho)$. Тогда (см. (2.7)) $\chi_\tau^+(s,\nu) = e^{-C^0}\sqrt{\nu}/(\sqrt{\nu}+s\sqrt{\tau})$. Случай $c \le 0$ аналогичен.

Следствие 4 легко выводится из теоремы 2. Докажем следствие 5. Учитывая замечание 2(b) при $\omega = o(\theta(\rho))$ $\Phi(\tau,x) = \Phi(x/\sqrt{2\tau})$, как в следствии 3, получаем $N(s,\nu,1,1) = \exp\left\{\int\limits_0^\infty (e^{-sx}-1)\left[\int\limits_0^\infty e^{-\nu u} f(u,x)du\right]dx\right\}$. Из вида ПЛ $e^{-x\sqrt{s}}$ плотности $xf(u,x)$ с учетом (П.1) заключаем, что $N(s,\nu,1,1) = \sqrt{\nu}/(\sqrt{\nu}+s)$.

Ереванский государственный университет

А. Р. Мартиросян, И. Э. Даниелян

Аппроксимация критических рисков в страховых портфелях

Предложена модель страховой компании, которая предоставляет клиентам договоры со страховыми сделками и связанные с пожизненной рентой. При конечности моментов порядка $\gamma \in (1,2]$ страховых выплат доказаны предельные теоремы для критических рисков. Результаты даны в виде интегральных преобразований предельных законов. При конечности второго момента некоторые предельные законы получены в явном виде.

Ա. Ռ. Մարտիրոսյան, Ի. Է. Դանիելյան

Կրիտիկական ռիսկերի մոտարկում ապահովագրական պայուսակներում

Առաջարկված է հաճախորդներին զուտ ապահովագրական եւ կյանքի ցմահ ռենտայի պայմանագրեր տրամադրող ապահովագրական ընկերության մոդել: Ապահովագրական վճարների $\gamma \in (1,2]$ կարգի վերջավոր մոմենտի դեպքում ապացուցված են սահմանային թեորեմներ՝ կրիտիկական ռիսկերի վերաբերյալ: Սահմանային բաշխումներն ստացված են ինտեգրալ ձեւափոխությունների տեսքով: Ապահովագրական վճարների երկրորդ կարգի վերջավոր մոմենտի գոյության դեպքում որոշ բաշխումներ բերված են բացահայտ տեսքով:

A. R. Martirosyan, I. E. Danielyan

Approximation of Critical Risks in Insurance Portfolios

The stochastic model of the insurance company is considered which gives contracts with clearly insurance transactions, and life annuity contracts to clients. Limit theorems for critical risks are proved under the condition of finiteness of the moments of the order $\gamma \in (1, 2]$ of insurance payments. Results are presented by means of integral transformations for limit laws. In case of finiteness of the second moment of payments some limit laws are received in explicit forms.

Литература

1. *Такач Л.* Комбинаторные методы в теории случайных процессов. М. Мир. 1971.

2. *Мартиросян А. Р., Читчян Р. Н.* - Информ. технология и управление. Ереван. 2007. С. 75-99.

3. *Феллер В.* - Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М. Мир. 1984.

4. *Золотарев В. М.* Одномерные устойчивые распределения. М. Наука. 1980.

5. *Угарид Мухамед.* Модели типа $M|G|1|\infty$ при критической загрузке. Канд. дис. Ереван. 1990.

6. *Даниелян Э. А., Мартиросян А. Р., Читчян Р. Н.* - Математика в высшей школе. Ереван. 2007. Т. 3. N3. С. 10-17.

7. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М. Наука. 1980.

8. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М. Наука. 1969.