ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 108 2008 №2

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

В. Ж. Думанян

О поведении вблизи границы решения задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка

(Представлено академиком А.Б. Нерсесяном 20/XII 2007)

Ключевые слова: *эллиптические уравнения, задача Дирихле, поведение вблизи границы, граничное значение*

Работа посвящена изучению поведения вблизи границы решения задачи Дирихле в ограниченной области $Q \subset R_n$, $n \geq 2$, с гладкой границей ∂Q для эллиптического уравнения второго порядка

$$-\sum_{i,\,j=1}^{n}(a_{i\,j}(x)u_{x_i})_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)u_{x_i}-\sum_{i=1}^{n}(c_i(x)u)_{x_i}+d(x)u=f(x)-divF(x), \quad x\in Q; \quad (1)$$

$$u|_{\partial Q}=u_0, \quad (2)$$

с $u_0 \in L_2(\partial Q)$; функции f и $F = (f_1, \ \dots, \ f_n)$ принадлежат $L_{2,\,loc}(Q)$, симметрическая матрица $A(x) = (a_{i\,j}(x))$, элементы которой являются вещественнозначными измеримыми функциями, удовлетворяет условию

$$\gamma_1|\xi|^2 \leq \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{i\,j}(x)\xi_i\xi_j = (\xi,\ A(x)\xi) \leq \gamma_2|\xi|^2 \quad (3)$$

для всех $\xi = (\xi_1, \ \dots, \xi_n) \in R_n$ и $x \in Q$ с положительными постоянными γ_1 и γ_2, а коэффициенты $b(x) = (b_1(x), \ \dots, \ b_n(x))$, $c(x) = (c_1(x), \ \dots, \ c_n(x))$ и $d(x)$ являются измеримыми и ограниченными в каждой строго внутренней подобласти области Q функциями.

Целью работы является получение условий на коэффициенты при младших членах уравнения, при которых решение рассматриваемой задачи обладает свойством $(n-1)$-мерной непрерывности. Понятие s-мерной непрерывности, являющееся естественным обобщением непрерывности функции по совокупности переменных, было предложено А.К.Гущиным в работе [1] и заключается в следующем.

Пусть μ и ν — меры (будем считать их единичными) в $\mathbf{R}_n$ с носителями в $\bar{Q}$ и удовлетворяют условию: существует такая постоянная C, что для всех $r > 0$ и $x^0 \in \bar{Q}$ мера шара $B_{x^0}(r)$ радиуса r с центром в точке x^0 не превосходит числа $Cr^s, \quad 0 < s < n$; наименьшую из таких постоянных C будем называть нормой меры и обозначать через $\|\mu\|$ (или, соответственно, $\|\nu\|$). Пусть ϕ — такая мера в $\mathbf{R}_{2n}$ с носителем в $\bar{Q} \times \bar{Q}$, что $\mu(G) = \phi(G \times \mathbf{R}_n)$, $\nu(G) = \phi(\mathbf{R}_n \times G)$ для всех (борелевских) множеств $G \subset \bar{Q}$. Следуя [1], функцию v будем называть s-мерно непрерывной, если для любого положительного числа ε найдется такое число $\delta > 0$, что

$$\frac{1}{\|\mu\| + \|\nu\|} \int\limits_{\bar{Q} \times \bar{Q}} [v(x) - v(y)]^2 d\phi(x,y) < \varepsilon$$

(расстояние между значениями функции v на этих мерах вдоль ϕ меньше ε),

$$\int\limits_{\bar{Q}} | \, x - y \, | \, d\phi(x,y) < \delta$$

(расстояние между мерами μ и ν вдоль ϕ меньше δ). Отметим, что если в этом определении взять произвольные меры ($s = 0$), то получится классическое определение равномерной непрерывности функции на $\bar{Q}$. Множество всех s-мерно непрерывных (в $\bar{Q}$) функций образует банахово пространство $C_s(\bar{Q})$, являющееся пополнением $C(\bar{Q})$ по норме, эквивалентной функционалу

$$\ell(v) = \int\limits_0^\infty M_s\left(\left\{x \in \bar{Q} \ : \ |v(x)|^2 > \lambda\right\}\right) \, d\lambda, \quad v \in C(\bar{Q}),$$

в котором

$$M_s(E) = inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} r_i^s \, , \ \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_{r_i} \supset E \right\},$$

а точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества E шарами $\mathcal{B}_{r_i}$ радиуса r_i; $C_0(\bar{Q}) = C(\bar{Q})$, а $C_n(\bar{Q}) = L_2(Q)$, см. [1]. Свойство $(n-1)$-мерной непрерывности решения задачи Дирихле с граничной функцией u_0 из $L_2(\partial Q)$ для уравнения без младших членов ($b_i = 0, c_i = 0, d = 0$) с $f \in W_2^{-1}$ $(F = 0)$ было установлено в работе [1]. При этом предполагалось, что единичный вектор внутренней нормали $\bar{\nu}$ к границе удовлетворяет условию Дини

$$\left|\bar{\nu}\,(x) - \bar{\nu}\,(y)\right| \le \omega\left(|x-y|\right) \tag{4}$$

для всех x и y из ∂Q, где ω — такая монотонная функция, что

$$\int\limits_0 \frac{\omega(t)}{t}\,dt < \infty,$$

а коэффициенты $a_{i\,j}$ непрерывны по Дини на границе

$$|a_{i\,j}(x) - a_{i\,j}(y)| \le \omega\left(|x-y|\right) \tag{5}$$

для всех $x \in \partial Q$, $y \in Q$ и i, $j = 1, \ \dots, \ n$; не ограничивая общности, можно считать, что функция ω в условиях (4) и (5) одна и та же. Обобщение приведенного выше результата на более широкий класс правых частей было получено в работе [2]. В ней было показано, что эта теорема остается справедливой, если

$$\begin{gathered} r^{\frac{1}{2}}(x)\,(1+|\ln r(x)|)^{\frac{3}{4}}\,|F(x)| \in L_2(Q), \\ r^{\frac{3}{2}}(x)\,(1+|\ln r(x)|)^{\frac{3}{4}}\,|f(x)| \in L_2(Q), \end{gathered} \tag{6}$$

где $r(x)$ — расстояние от точки $x \in Q$ до границы ∂Q.

Для уравнения с младшими членами (при $c(x) = 0$) принадлежность решения рассматриваемой задачи пространству $C_{n-1}(\bar{Q})$ была установлена в работах [3, 4]. При этом относительно коэффициентов $b(x)$ и $d(x)$ предполагалось выполнение следующих условий:
существует постоянная $K > 0$ такая, что

$$|b(x)| \le \frac{K}{r(x)(1+|\ln r|)^{\frac{3}{4}}}, \quad x \in Q; \tag{7}$$

существует монотонная функция $D(t)$ такая, что

$$|d(x)| \le D(r(x)), \quad x \in Q \quad \text{и} \quad \int\limits_0 t^3 |\ln t|^{\frac{3}{2}} D^2(t)\,dt < \infty. \tag{8}$$

Далее мы также будем предполагать условия (4)-(8) выполненными.

Под решением задачи (1), (2) будем понимать функцию u из $W^1_{2,\,loc}(Q)$, удовлетворяющую уравнению (1) в смысле обобщенных функций, т.е. такую, что для всех $\eta \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_Q (A(x)\nabla u + c(x)u,\ \nabla\eta)\,dx + \int\limits_Q ((b(x),\ \nabla u) + d(x)u)\,\eta\,dx = \int\limits_Q (f\eta + (F,\ \nabla\eta))\ dx,$$

и удовлетворяющую условию (2) в следующем смысле:
для каждой точки $x^0 \in \partial Q$ найдется такая ее окрестность $V_{x^0} \subset \partial Q$, что

$$\int\limits_{V_{x^0}} \Big(u(x+\delta\,\bar{\nu}\,(x^0)) - u_0(x)\Big)^2\ ds \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0. \tag{9}$$

Понятие решения из $W^1_{2,\,loc}(Q)$ было введено в случае области с дважды гладкой границей В.П.Михайловым в работах [5, 6], см. также [7-9]. При этом принятие решением своего граничного значения понималось в следующем смысле:

$$\int\limits_{\partial Q} \left(u\left(\varphi_\delta(x)\right) - u_0(x)\right)^2\ ds \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0,$$

где $\varphi_\delta(x) = x + \delta\,\bar{\nu}\,(x)$. В [5, 6] было установлено, что в случае уравнения с гладкими коэффициентами ($a_{i\,j}(x),\ b_i(x) \in C^1(\bar{Q}),\ \ i,j = 1,\ \ldots, n,\ \ d(x) \in C^1(\bar{Q})$, а $c(x) = 0$) задача (1), (2) в приведенной выше постановке фредгольмова и имеет тот же спектр, что и задача в $W^1_2(Q)$; если число ноль не является точкой спектра, то задача разрешима при любой граничной функции $u_0 \in L_2(\partial Q)$ и любой правой части f $(F \equiv 0)$, удовлетворяющей условию

$$\int\limits_Q r^\theta(x) f^2(x)\, dx < \infty, \qquad \text{с некоторым показателем} \quad \theta < 3.$$

Обобщение этого результата на области с Ляпуновской границей было получено в работах [10] и [11]; при этом выполнение граничного условия (2) формулировалось в локальных терминах — требовалось выполнение (9). Тем самым было показано, что в отображении $x \;\to\; \varphi_\delta(x),\ x \in \partial Q$, ставящем в соответствие точкам границы точки "параллельной" ей поверхности, можно немного отойти от выделенного ("ортогонального" к границе) направления, можно брать нормаль в фиксированной точке рассматриваемой окрестности. Свойство $(n-1)$-мерной непрерывности показывает, что от выделенного направления нормали можно отказаться полностью: со значениями граничной функции u_0 можно сравнить не только значения решения u на "параллельных" к границе или близких к ним поверхностях, но и на образах ∂Q при отображениях из довольно широкого класса. В частности, поверхность ∂Q можно разбить на достаточно мелкие части и каждую из них подвинуть и повернуть (не выходя из $\bar{Q}$) так, чтобы точки переместились "не очень далеко"; при этом разные точки границы могут перейти в одну точку, но нельзя допустить, чтобы таких точек было "слишком много". Кроме того, обсуждаемое свойство позволяет дать определение решения задачи Дирихле с квадратично суммируемой граничной функцией, не использующее условия гладкости границы (точнее см. [1]).

В настоящей работе устанавливается принадлежность пространству $C_{n-1}(\bar{Q})$ решения из $W^1_{2,\,loc}$ задачи Дирихле для общего уравнения второго порядка. Относительно коэффициента $c(x)$ предполагается выполнение следующего условия:

существует монотонная функция $C(t)$ такая, что

$$|c(x)| \le C(r(x)), \quad x \in Q \quad \text{и} \quad \int\limits_0 t|\ln t|^{\frac{3}{2}} C^2(t)\,dt < \infty. \tag{10}$$

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема. *Пусть выполнены условия (3)-(8) и (10). Тогда решение из $W^1_{2,\,loc}$ задачи Дирихле (1), (2) принадлежит пространству $C_{n-1}(\bar{Q})$.*

Отметим, что доказательство этого утверждения не следует из результатов работ [1] и [2]: если перенести младшие члены уравнения в правую часть и рассмотреть исследуемое решение как решение уравнения без младших членов, то из (6) - (10), вообще говоря (без привлечения дополнительных свойств решений эллиптических уравнений), не следует выполнение условий (6) для новой правой части. Доказательство теоремы существенно использует утверждение работы [12].

Ереванский государственный университет

В. Ж. Думанян

О поведении вблизи границы решения задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка

Получены условия на коэффициенты младших членов, при которых решение задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка

$$-\sum_{i,\,j=1}^{n} (a_{i\,j}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} - \sum_{i=1}^{n} (c_i(x)u)_{x_i} + d(x)u = f(x) - divF(x), \quad x \in Q,$$

$$u|_{\partial Q} = u_0 \in L_2(\partial Q),$$

обладает свойством $(n-1)$-мерной непрерывности (принадлежит пространству А.К.Гущина $C_{n-1}(\overline{Q})$); при этом граничное значение u_0 является пределом в L_2 следов решения на поверхностях из довольно широкого класса (не обязательно "параллельных" к границе).

Վ. Ժ. Դումանյան

Երկրորդ կարգի ընդհանուր էլիպտական հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի լուծման եզրի մոտ վարքի մասին

Ստացված են պայմաններ կրտսեր անդամների գործակիցների համար, որոնց դեպքում երկրորդ կարգի ընդհանուր տեսքի էլիպտական հավասարման համար

$$-\sum_{i,\, j=1}^{n}(a_{i\, j}(x)u_{x_i})_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)u_{x_i}-\sum_{i=1}^{n}(c_i(x)u)_{x_i}+d(x)u=f(x)-divF(x),\quad x\in Q,$$

$$u|_{\partial Q}=u_0\in L_2(\partial Q).$$

Դիրիխլեի խնդրի լուծումը օժտված է $(n-1)$-չափանի անընդհատության հատկությամբ (պատկանում է Ա.Կ.Գուշչինի $C_{n-1}(\bar{Q})$ տարածությանը), ընդ այդմ u_0 եզրային արժեքը բավականին լայն դասից մակերեւույթների (ոչ պարտադիր եզրին «զուգահեռ») վրա լուծման հետքերի L_2 սահմանն է:

V. Z. Dumanyan

On the Behaviour Near the Boundary of Solution of the Dirichlet Problem for the General Second Order Elliptic Equation

Conditions on the low-order terms of the general second order elliptic equation are obtained for the solution of the Dirichlet problem

$$-\sum_{i,\, j=1}^{n}(a_{i\, j}(x)u_{x_i})_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)u_{x_i}-\sum_{i=1}^{n}(c_i(x)u)_{x_i}+d(x)u=f(x)-divF(x),\quad x\in Q,$$

$$u|_{\partial Q}=u_0\in L_2(\partial Q),$$

to be $(n-1)-$dimentional continuous (belongs to the Gushchin space $C_{n-1}(\bar{Q})$); at the same time the boundary value u_0 is the limit in L_2 of traces of the solution on surfaces from a rather wide class (not only "parallel" to the boundary).

Литература

1. *Гущин А. К.* - Матем. сб. 1988. Т. 137(179). №1(9). С. 19 − 64.
2. *Гущин А. К., Михайлов В. П.* - Матем. сб. 1991. Т. 182. №6. С. 787 − 810.
3. *Думанян В. Ж.* - ДАН РАН. 2002. Т. 386. №6. С. 735 −737.
4. *Dumanyan V. Zh.* - Note di Matematica. 2002/2003. V. 21. №2. P. 99 −118.
5. *Михайлов В. П.* - Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 10. С. 1877 −

1891.

6. *Михайлов В. П.* - Матем. заметки. 1980. Т. 27. $\mathcal{N}$1. С. 137 $-$145.

7. *Гущин А. К., Михайлов В. П.* - Тр. Междунар. конф. Москва 24 - 28 ноября 1980. М. Вычислительный центр АН СССР. 1981. С. 189 $-$ 205.

8. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М. Наука. 1983. 424 с.

9. *Богоявленский О. И., Владимиров В. С., Волович И. В., Гущин А. К., Дрожжинов Ю. Н., Жаринов В. В., Михайлов В. П.* - Тр. МИАН. 1986. Т. 175. С. 63 $-$ 102.

10. *Петрушко И. М.* - Матем. сб. 1982. Т. 119(161). С. 48 $-$ 77.

11. *Петрушко И. М.* - Матем. сб. 1983. Т. 120(162). С. 569 $-$ 588.

12. *Думанян В. Ж.* - ДНАН Армении. 2007. Т. 108. $\mathcal{N}$1. С. 45-49.