

Ի ԱԾԱԻ ԱԾԵԵԱ

УДК 517.9

Մ.Բ. Արմենյան

Ինտեգրալային հավասարումների լինիաների վերաբերյալ
 ճիշդացման հարցի վերաբերյալ

(Представлено академиком А.Б. Нерсесяном 3/ХІІ 2007)

Երբնայն դեպքում: эллиптические уравнения, задача Дирихле, весовой интеграл
 Дирихле

В работе рассматривается задача Дирихле в ограниченной области $Q \subset R_n$, $n \geq 2$, с гладкой границей ∂Q для общего эллиптического уравнения второго порядка

$$-\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i} - \sum_{i=1}^n (c_i(x)u)_{x_i} + d(x)u = f(x) - \operatorname{div} F(x), \quad x \in Q; \quad (1)$$

$$u|_{\partial Q} = u_0, \quad (2)$$

с $u_0 \in L_2(\partial Q)$; функции f и $F = (f_1, \dots, f_n)$ принадлежат $L_{2,loc}(Q)$, симметрическая матрица $A(x) = (a_{ij}(x))$, элементы которой являются вещественнозначными измеримыми функциями, удовлетворяет условию

$$\gamma_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i \xi_j = (\xi, A(x)\xi) \leq \gamma_2 |\xi|^2 \quad (3)$$

для всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R_n$ и $x \in Q$ с положительными постоянными γ_1 и γ_2 , а коэффициенты $b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))$, $c(x) = (c_1(x), \dots, c_n(x))$ и $d(x)$ являются измеримыми и ограниченными в каждой строго внутренней подобласти области Q функциями.

Как и в работах [1-2], будем предполагать что единичный вектор внутренней нормали $\bar{\nu}$ к границе ∂Q удовлетворяет условию Дини

$$|\bar{\nu}(x) - \bar{\nu}(y)| \leq \omega(|x - y|) \quad (4)$$

для всех x и y из ∂Q , где ω — такая монотонная функция, что

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty,$$

а коэффициенты a_{ij} непрерывны по Дини на границе

$$|a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \leq \omega(|x - y|) \quad (5)$$

для всех $x \in \partial Q$, $y \in Q$ и $i, j = 1, \dots, n$. Не ограничивая общности, можно считать, что функция ω в условиях (4) и (5) одна и та же.

Целью настоящей работы является установление ограниченности интеграла Дирихле с весом $r(x)$ для решения u задачи (1),(2), т.е. интегрируемости по Q функции $r(x)|\nabla u(x)|^2$, где $r(x)$ — расстояние точки $x \in Q$ до границы ∂Q .

В случае уравнения с гладкими коэффициентами и области с ляпуновской границей это утверждение хорошо известно (см. [3-10]). При выполнении условий (3) — (5) для уравнения без младших членов ($b_i = 0, c_i = 0, d = 0$) с $f \in W_2^{-1}$ ($F = 0$) оно было установлено в [1]. Обобщение этого результата на более широкий класс правых частей было получено в работе [2]. В ней было показано, что результат остается справедливым, если

$$r^{\frac{1}{2}}(x) (1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{4}} |F(x)| \in L_2(Q), \quad (6)$$

$$r^{\frac{3}{2}}(x) (1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{4}} |f(x)| \in L_2(Q).$$

При этом интегрируемость по Q функции $r(x)|\nabla u(x)|^2$ является не только необходимым, но и достаточным условием для того, чтобы решение уравнения (1) являлось решением задачи Дирихле с некоторой граничной функцией $u_0 \in L_2(\partial Q)$ (см. [2, 4]). В случае уравнения с младшими членами (с ненулевыми коэффициентами $b(x)$ и $d(x)$, а $c(x) = 0$) интегрируемость по Q функции $r(x)|\nabla u(x)|^2$ была установлена в работах [11,12], при этом относительно коэффициентов $b(x)$ и $d(x)$ предполагалось выполнение следующих условий:

существует постоянная $K > 0$ такая, что

$$|b(x)| \leq \frac{K}{r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{4}}}, \quad x \in Q, \quad (7)$$

существует монотонная функция $D(t)$ такая, что

$$|d(x)| \leq D(r(x)), \quad x \in Q \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} t^3 |\ln t|^{\frac{3}{2}} D^2(t) dt < \infty. \quad (8)$$

Далее будем предполагать условия (6), (7) и (8) выполненными. В настоящей работе рассматривается задача Дирихле для общего уравнения. Относительно коэффициента $c(x) = (c_1(x), \dots, c_n(x))$ предполагается выполнение следующего условия:

существует монотонная функция $C(t)$ такая, что

$$|c(x)| \leq C(r(x)), \quad x \in Q \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} t |\ln t|^{\frac{3}{2}} C^2(t) dt < \infty. \quad (9)$$

Под решением задачи (1), (2) будем понимать функцию u из $W_{2,loc}^1(Q)$, удовлетворяющую уравнению (1) в смысле обобщенных функций, т.е. такую, что для всех $\eta \in C_0^\infty(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_Q (A(x)\nabla u + c(x)u, \nabla \eta) dx + \int_Q ((b(x), \nabla u) + d(x)u) \eta dx = \int_Q (f\eta + (F, \nabla \eta)) dx, \quad (10)$$

и удовлетворяющую условию (2) в следующем смысле: для каждой точки $x^0 \in \partial Q$ найдется такая ее окрестность $V_{x^0} \subset \partial Q$, что

$$\int_{V_{x^0}} \left(u(x + \delta \bar{\nu}(x^0)) - u_0(x) \right)^2 ds \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow +0.$$

Как отмечалось, коэффициенты $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ — измеримые и в каждой строго внутренней подобласти ограниченные функции, а коэффициенты $a_{ij}(x)$ удовлетворяют условию (3). Тем самым постановка исследуемой задачи не требует условий гладкости коэффициентов уравнения и, следовательно, рассматриваемое в настоящей работе уравнение (1) общего вида не сводится к ранее изученному в [11,12] случаю при $c(x) = 0$.

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Òàî ðàì à. Пусть выполнены условия (3)-(9) и пусть u — решение из $W_{2,loc}^1$ задачи Дирихле (1), (2). Тогда функция $r(x)|\nabla u(x)|^2$ интегрируема по Q , т.е.

$$\int_Q r(x)|\nabla u(x)|^2 dx < \infty.$$

Доказательство теоремы проводится по схеме доказательства леммы 1 работы [1]. Область Q представляется в виде объединения конечного числа "цилиндрообразных" областей. Далее, подставляя в интегральное тождество

(10) основную функцию η специального вида с носителем в соответствующей "цилиндробразной" области и оценивая возникающие при этом интегралы, получаем требуемую оценку для каждой такой области.

Ереванский государственный университет

Ա.Ք. Աօի աի յի

Ի ա ի օճաի Ե՝աի ի ի նօԵ ասի ի աի ի Ե յի օաճաԵա ԱԵԵԵԵա ծաՅաի Եյ շաա՝Ե ԱԵԵԵԵա ԵԵյ
յԵԵԵԵ յԵ՝աի ի ի օճաի աի Եյ աօի ծի աի ի ի ծյաԵա

В ограниченной области Q , $\partial Q \in C^1$, рассматривается задача Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка общего вида

$$-\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i} - \sum_{i=1}^n (c_i(x)u)_{x_i} + d(x)u = f(x) - \operatorname{div}F(x), \quad x \in Q,$$

$$u|_{\partial Q} = u_0 \in L_2(\partial Q).$$

Для решения установлена ограниченность интеграла Дирихле с весом $r(x)$, т.е. интегрируемость по Q функции $r(x)|\nabla u(x)|^2$, где $r(x)$ — расстояние точки $x \in Q$ до границы ∂Q .

Վ. Ժ. Դումանյան

Երկրորդ կարգի էլիպտական հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի լուծման Դիրիխլեի կշռային ինտեգրալի սահմանափակության մասին

Դիսարկվում է Դիրիխլեի խնդիրը երկրորդ կարգի ընդհանուր տեսքի գծային էլիպտական հավասարման համար Q , $\partial Q \in C^1$ սահմանափակ տիրույթում՝

$$-\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i} - \sum_{i=1}^n (c_i(x)u)_{x_i} + d(x)u = f(x) - \operatorname{div}F(x), \quad x \in Q,$$

$$u|_{\partial Q} = u_0 \in L_2(\partial Q) :$$

Լուծման համար ցույց է տրված $r(x)$ կշռով Դիրիխլեի ինտեգրալի սահմանափակությունը՝ Q տիրույթով $r(x)|\nabla u(x)|^2$ ֆունկցիայի ինտեգրելիությունը, որտեղ $r(x)$ -ը $x \in Q$ կետի հեռավորությունն է ∂Q եզրից:

On the Boundedness of Dirichlet's Weight Integral for Solution of the Dirichlet Problem for the Second Order Elliptic Equation

We consider the Dirichlet problem in a bounded domain Q , $\partial Q \in C^1$ for the general second order linear elliptic equation

$$-\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i} - \sum_{i=1}^n (c_i(x)u)_{x_i} + d(x)u = f(x) - \operatorname{div}F(x), \quad x \in Q,$$

$$u|_{\partial Q} = u_0 \in L_2(\partial Q).$$

For the solution we prove boundedness of the Dirichlet integral with the weight $r(x)$, i.e. the function $r(x)|\nabla u(x)|^2$ is integrable over Q , where $r(x)$ is the distance from a point $x \in Q$ to the boundary ∂Q .

Ёёòàðàòóðà

1. *Гуцин А. К.* - Матем. сб. 1988. Т. 137(179). N1(9). С. 19-64.
2. *Гуцин А. К., Михайлов В. П.* - Матем. сб. 1991. Т. 182. N6. С. 787-810.
3. *Михайлов В. П.* - Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. N10. С. 1877-1891.
4. *Михайлов В. П.* - Матем. сб. 1976. Т. 101(143). N2(10). С. 163-188.
5. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М. Наука. 1983. 424 с.
6. *Петрушко И. М.* - Матем. сб. 1982. Т. 119(161). С. 48-77.
7. *Петрушко И. М.* - Матем. сб. 1983. Т. 120(162). С. 569-588.
8. *Михайлов В. П.* - Матем. заметки. 1980. Т. 27. N1. С. 137-145.
9. *Гуцин А. К., Михайлов В. П.* - Обобщенные функции и их применения в математической физике. Тр. Междунар. конф. Москва 24-28 ноября 1980. М. Вычислительный центр АН СССР. 1981. С. 189-205.
10. *Богоявленский О. И., Владимиров В. С., Волович И. В., Гуцин А. К., Дрожжинов Ю. Н., Жаринов В. В., Михайлов В. П.* - Тр. МИАН. 1986. Т. 175. С. 63-102.
11. *Думанян В. Ж.* - ДАН РАН. 2002. Т. 386. N6. С. 735-737.
12. *Dumanyan V. Zh.* - Note Di Matematica. 2002/2003. V. 21. N2. P. 99-118.