

Ի ԱՌԱՆՔԻ ԱՌԵՒՄ

УДК 517.53

Ի . Ա . Ի առաինյի

Օաիժաի ւ աեիաաի եյ ա իժի ոժժաի ոժաա A_ω^*

(Представлено академиком В.С. Захаряном 11/X 2007)

Էբր-աաւա նեիաա: *голоморфные функции, вложения, единичный круг, мера, интеграл*

Пусть D - единичный круг на комплексной плоскости и пусть $\omega(r)$ - монотонная неотрицательная функция из класса $L^1(0; 1)$. Обозначим через A_ω^* класс голоморфных в круге функций $f(z)$, для которых

$$\|f(z)\|_{A_\omega^*} = \int_D \omega(1 - |z|) \log^+ |f(z)| dm_2(z) < +\infty.$$

Отметим, что при $\omega(r) = (1 - r^2)^\beta$, $\beta > -1$, эти классы впервые были введены и подробно изучены в работах М.М.Джрбашяна [1,2]. В дальнейшем будем предполагать, что $\omega(r)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{0 < r < 1} \left| \frac{\omega'(r) \cdot (1 - r)}{\omega(r)} \right| = \beta_\omega < +\infty.$$

При этом предполагаем, что $0 < \beta_\omega < 1$ имеет место, когда $\omega(r)$ монотонно растёт.

В данной работе получим полное описание тех неотрицательных мер μ на D , для которых имеет место вложение в пространстве A_ω^* . Основным результатом работы является следующая

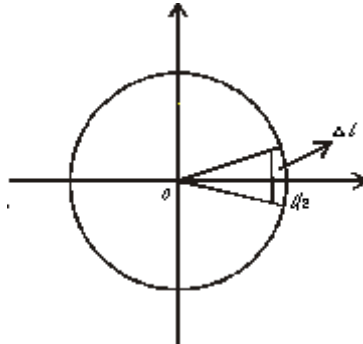
Օաիժաի ա 1. *Пусть μ - конечная неотрицательная мера в единичном круге D . Тогда следующие условия равносильны:*

$$a) \int_D \log^+ |f(z)| d\mu(z) \leq C \int_D \log^+ |f(z)| \cdot \omega(1 - |z|) dm_2(z), \quad (1)$$

$$b) \mu(\Delta_l) \leq \text{const} \cdot \omega(l) \cdot l^2, \quad (2)$$

где C - некоторая постоянная, а

$$\Delta_l \stackrel{def}{=} \left\{ z : 1 - l \leq |z| < 1, |\arg z| < \frac{l}{2} \right\}.$$



Докажем импликацию а) \Rightarrow б).

Рассмотрим функцию $g(z)$ из класса A_ω^1 , т.е.

$$\int_D \omega(1 - |z|)|g(z)|dm_2(z) < +\infty.$$

Тогда функция $f(z) = \exp\{g(z)\}$ будет принадлежать классу A_ω^* . Следовательно, имеем

$$\log^+ |f(z)| \leq \log^+(\exp\{g(z)\}) = (Reg(z))^+ \leq |g(z)|.$$

Поэтому из неравенства (1) получаем

$$\int_D (Reg(z))^+ d\mu(z) \leq \int_D |g(z)|\omega(1 - |z|)dm_2(z). \quad (3)$$

Обозначим $u(z) = Reg(z)$, $-u(z) = -Reg(z)$. По определению $(u(z))^+$ имеем

$$(u(z))^+ = \begin{cases} u(z), & \text{когда } u(z) \geq 0, \\ 0, & \text{когда } u(z) < 0, \end{cases}$$

$$(u(z))^- = \begin{cases} -u(z), & \text{когда } u(z) \leq 0, \\ 0, & \text{когда } u(z) > 0, \end{cases}$$

Следовательно,

$$|u(z)| = (u(z))^+ + (u(z))^-.$$

Из неравенства (3) имеем

$$\int_D (u(z))^+ d\mu(z) \leq C \int_D |u(z)|\omega(1 - |z|)dm_2(z),$$

$$\int_D (u(z))^- d\mu(z) \leq C \int_D |u(z)|\omega(1 - |z|)dm_2(z).$$

Отсюда получаем

$$\int_D ((u(z))^+ + (u(z))^-) d\mu(z) \leq C_1 \int_D |u(z)| \omega(1 - |z|) dm_2(z)$$

или

$$\int_D |u(z)| d\mu(z) \leq C_1 \cdot \int_D |u(z)| \omega(1 - |z|) dm_2(z). \quad (4)$$

Рассмотрим функцию $\exp\{\pm ig(z)\}$, которая также принадлежит классу A_ω^* . Обозначив $\pm V(z) = \operatorname{Re}\{\pm ig(z)\}$, получим

$$\int_D |V(z)| d\mu(z) \leq C_2 \cdot \int_D |V(z)| \omega(1 - |z|) dm_2(z). \quad (5)$$

Объединяя оценки (4) и (5), получим

$$\int_D (|u(z)| + |V(z)|) d\mu(z) \leq C_3 \cdot \int_D (|u(z)| + |V(z)|) \omega(1 - |z|) dm_2(z). \quad (6)$$

Так как $g(z) = u(z) + iV(z)$ и имея в виду лемму Шамояна [3], гласящую, что *если $u(z)$ и $V(z)$ сопряженные субгармонические функции, тогда имеет место следующая оценка:*

$$\int_D |V(z)| \omega(1 - |z|) dm_2(z) \leq C \cdot \int_D |u(z)| \omega(1 - |z|) dm_2(z),$$

из неравенства (6) получим

$$\int_D |g(z)| d\mu(z) \leq C_4 \int_D |u(z)| \omega(1 - |z|) dm_2(z).$$

Отсюда окончательно получим

$$\int_D |g(z)| d\mu(z) \leq C_5 \int_D |g(z)| \omega(1 - |z|) dm_2(z). \quad (7)$$

Таким образом, для любой $g(z) \in A_\omega^1$ справедливо неравенство (7). Теперь положим

$$g(z) = \frac{(1 - \delta^2)^\beta}{(1 - \delta z)^{2\beta}}, \quad \beta > 0, \quad 0 < \delta < 1.$$

Тогда для оценивания левого и правого интеграла в неравенстве (7) имеем

$$\int_D |g(z)| \omega(1 - |z|) dm_2(z) = \int_D \frac{(1 - \delta^2)^\beta}{(1 - \delta z)^{2\beta}} \omega(1 - |z|) dm_2(z) =$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - \delta^2)^\beta \int_0^1 \int_{-\pi}^\pi \frac{\omega(1-r)rdrd\varphi}{\left[(1-\delta r)^2 + 4\delta r \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right]^\beta} \leq C \cdot (1 - \delta^2)^\beta \int_0^1 \frac{\omega(1-r)rdr}{(1-\delta r)^{2\beta-1}} = \\
&= C \cdot (1 - \delta^2)^\beta \left(\int_0^\delta \frac{\omega(1-r)rdr}{(1-\delta r)^{2\beta-1}} + \int_\delta^1 \frac{\omega(1-r)rdr}{(1-\delta r)^{2\beta-1}} \right) \leq \\
&\leq C \cdot \frac{(1 - \delta^2)^\beta \omega(1-\delta)}{(1-\delta)^{2\beta-2}} = \frac{C \cdot \omega(l)}{l^{\beta-2}},
\end{aligned} \tag{7'}$$

где $l = 1 - \delta$, $0 < l < 1$.

Оценим снизу левый интеграл в неравенстве (7). Имеем

$$\int_D |g(z)| d\mu(z) = \int_D \frac{(1 - \delta^2)^\beta}{|1 - \delta z|^{2\beta}} d\mu(z) \geq \frac{(1 - \delta^2)^\beta}{(1 - \delta)^{2\beta}} \int_{\Delta_l} d\mu(z) = \frac{\mu(\Delta_l)}{l^\beta}, \tag{7''}$$

так как

$$|1 - \delta z|^2 = [(1 - \delta) + \delta(1 - r)]^2 + 4\delta r \sin^2 \frac{\varphi}{2} \geq (1 - \delta)^2$$

при $z \in \Delta_l$. Поэтому

$$\frac{(1 - \delta^2)^\beta}{|1 - \delta z|^{2\beta}} \geq \frac{(1 - \delta^2)^\beta}{(1 - \delta)^{2\beta}}.$$

Объединяя оценки (7') и (7''), из неравенства (7) приходим к неравенству (2):

$$\begin{aligned}
\frac{\mu(\Delta_l)}{l^\beta} &\leq \frac{\omega(l)}{l^{\beta-2}}, \text{ т.е.} \\
\mu(\Delta_l) &\leq \text{const} \cdot \omega(l) \cdot l^2.
\end{aligned}$$

Докажем импликацию б) \Rightarrow а).

Известно, что если функция $f(z) \in A_\omega^*$, то $f(z)$ допускает следующую факторизацию [3]:

$$f(z) = \pi_\beta^f(z, z_k) \cdot \exp\{g_\beta^f(z)\}, \tag{8}$$

где $\beta > \beta_\omega$,

$$\pi_\beta^f(z, z_k) = \prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp \left\{ -\frac{2(\beta+1)}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^\pi \frac{(1-\rho^2)^\beta \log \left|1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{z_k}\right| \rho d\rho d\theta}{(1 - z\rho e^{-i\theta})^{\beta+2}} \right\},$$

$$g_\beta^f(z) = \frac{\beta+1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^\pi \frac{(1-\rho^2)^\beta \log |f(\rho e^{i\theta})| \rho d\rho d\theta}{(1 - z\rho e^{-i\theta})^{\beta+2}},$$

$$\beta_\omega = \text{Sup}_{0 < t < 1} \left| \frac{\omega'(t) \cdot (1-t)}{\omega(t)} \right|, \quad z \in D.$$

Из (8) имеем

$$\log^+ |f(z)| \leq \log^+ |\pi_\beta^f(z, z_k)| + (Re g_\beta^f(z))^+.$$

Поскольку $g_\beta^f(z) \in A_\omega^1$, то для функций $(Re g_\beta^f(z))^+$ неравенство (1) имеет место, как только выполняется условие (2), т.е.

$$\int_D Re(g_\beta^f(z))^+ d\mu(z) \leq C \cdot \int_D (Re g_\beta^f(z))^+ \omega(1 - |z|) dm_2(z). \quad (8')$$

Остается доказать, что для функций $\log^+ |\pi_\beta^f(z, z_k)|$ также имеет место неравенство (1) при условии (2). Известно, что если нули $\{z_k\}_1^\infty$, удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^2 \omega(1 - |z_k|) < +\infty, \quad \beta > \beta_\omega,$$

то $\pi_\beta^f(z, z_k)$ принадлежит классу A_ω^* и имеет место следующая оценка [3]:

$$\log |\pi_\beta^f(z, z_k)| \leq \text{const} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - |z_k|^2)^{\beta+2}}{|1 - \bar{z}_k z|^{\beta+2}}, \quad z \in D,$$

следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \int_D \log^+ |\pi_\beta^f(z, z_k)| d\mu(z) &\leq \text{const} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - |z_k|^2)^{\beta+2} d\mu(z)}{|1 - \bar{z}_k z|^{\beta+2}} \leq \\ &\leq \text{const} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|^2)^{\beta+2} \int_D \frac{d\mu(z)}{|1 - \bar{z}_k z|^{\beta+2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Отдельно оценим внутренний интеграл. По лемме Шамомяна [3], имеем

$$\int_D \frac{d\mu(z)}{|1 - \bar{z}_k z|^{\beta+2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \frac{1}{|1 - \bar{z}_k z_{k,l}|^{\beta+2}} \cdot \int_{\Delta_{k,l}} d\mu(z) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \frac{\mu(\Delta_{k,l})}{|1 - \bar{z}_k z_{k,l}|^{\beta+2}}, \quad (9')$$

где

$$\Delta_{k,l} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ z : 1 - \frac{1}{2^{k-1}} \leq |z| < 1 - \frac{1}{2^k}, \frac{\pi l}{2^k} \leq \arg z < \frac{\pi(l+1)}{2^k} \right\}.$$

Так как

$$\mu(\Delta_{k,l}) \leq \mu(\tilde{\Delta}_{k,l}) \leq c \cdot \omega\left(\frac{1}{2^k}\right) \cdot \left(\frac{1}{2^k}\right)^2,$$

где

$$\tilde{\Delta}_{k,l} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ z : 1 - \frac{1}{2^{k-1}} \leq |z| < 1 - \frac{1}{2^k}, \frac{\pi l}{2^k} \leq \arg z < \frac{\pi(l+1)}{2^k} \right\},$$

то из (9') получим

$$\int_D \frac{d\mu(z)}{|1 - \bar{z}_k z|^{\beta+2}} \leq \text{const} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \frac{\omega(1 - |z_{k,l}|) \cdot (1 - |z_{k,l}|)^2}{|1 - \bar{z}_k z_{k,l}|^{\beta+2}} \leq \int_D \frac{\omega(1 - |z|)}{|1 - \bar{z}_k z|^{\beta+2}} dm_2(z).$$

Имея в виду работу [3], окончательно получим

$$\int_D \frac{d\mu(z)}{|1 - \bar{z}_k z|^{\beta+2}} \leq \text{const} \cdot \frac{\omega(1 - |z_k|)}{|1 - z_k|^\beta}.$$

Таким образом, из (9) получим

$$\begin{aligned} \int_D \log^+ |\pi_\beta^f(z, z_k)| d\mu(z) &\leq \text{const} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^2 \omega(1 - |z_k|) \leq \\ &\leq \text{const} \cdot \int_D \omega(1 - |z|) \log^+ |f(z)| dm_2(z). \end{aligned} \quad (8'')$$

Объединяя (8') и (8''), окончательно приходим к доказательству достаточного условия теоремы, т.е.

$$\int_D \log^+ |f(z)| d\mu(z) \leq C \int_D \omega(1 - |z|) \log^+ |f(z)| dm_2(z),$$

если имеет место неравенство (2).

Теорема полностью доказана.

На основе этой теоремы можно доказать следующее свойство для функций класса A_ω^* .

Лемма 2. Пусть последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию Карлесона

$$\prod_{k \neq m} \left| \frac{z_k - z_m}{1 - \bar{z}_k z_m} \right| \geq \delta, \quad 0 < \delta < 1.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \omega(1 - |z_k|) (1 - |z_k|)^2 \log^+ |f(z_k)| < +\infty$$

для любого $f(z) \in A_\omega^*$.

Доказательство. Положим

$$\mu(e) = \sum_{z_k \in e} \omega(1 - |z_k|) (1 - |z_k|)^2,$$

где $\mu(e)$ - мера Дирака. Докажем, что для любого $f(z) \in A_\omega^*$ имеет место

$$\int_D \log^+ |f(z)| d\mu(z) < +\infty.$$

По теореме 1 достаточно доказать, что

$$|\mu(\Delta_l)| \leq \sum_{z_k \in \Delta_l} \omega(1 - |z_k|) (1 - |z_k|)^2 \leq C \cdot \omega(l) \cdot l^2,$$

где $1 - l \leq |z_k| < 1$. Имеем

$$|\mu(\Delta_l)| \leq \sum_{z_k \in \Delta_l} \omega(1 - |z_k|)(1 - |z_k|)^2 \leq \omega(l) \cdot l \cdot \sum_{z_k \in \Delta_l} (1 - |z_k|).$$

По теореме Карлесона имеем

$$\sum_{z_k \in \Delta_l} (1 - |z_k|) \leq C \cdot l.$$

Поэтому $\mu(\Delta_l) \leq \text{const} \cdot \omega(l) \cdot l^2$.

По доказанной теореме 1 имеем

$$\int_D \log^+ |f(z)| d\mu(z) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \omega(1 - |z_k|)(1 - |z_k|)^2 \log^+ |f(z_k)| < +\infty.$$

Теорема доказана. Можно доказать и обратное утверждение:

Допустим, $\{C_k\}_1^{\infty}$ - произвольная последовательность комплексных чисел такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \omega(1 - |C_k|)(1 - |C_k|)^2 \log^+ |f(C_k)| < +\infty,$$

тогда существует функция $f(z) \in A_{\omega}^*$ такая, что $f(z) = C_k$ при всех k .

Гюмрийский филиал ГИУА

Ի . Ա . Ի ձօձձի նյի

Օձի ծձի ու ձեի ձեի եյ ձ Ի ձի ոծձի ոծձձ A_{ω}^*

Получено полное описание тех неотрицательных мер μ на D , для которых имеет место вложение в пространстве A_{ω}^* .

Պ . Ա . Մաթևոսյան

Ներդրման թեորեմներ A_{ω}^* փարածությունում

Աշխատանքում սրացվել են բոլոր այն ոչ բացասական μ չափերի լրիվ նկարագիրը D -ի վրա, որոնց դեպքում տեղի ունի ներդրում A_{ω}^* փարածությունում:

P. A. Matevosyan

Theorems of Inclusion in the Space A_ω^*

In the work it is received the full description of those non-negative measures of μ on D in the case of which there is an inclusion in the A_ω^* space.

Ենթադրություններ

1. *Ջրբաշյան Մ.Մ.* - ԺԱՆ ԱրմՍՍՐ. 1945. Թ. 3. N 1, Ս. 3-9.
2. *Ջրբաշյան Մ.Մ.* - Տոօբժ. Ին-տա մաթեմատիկա և մեխանիկա ԱՆ ԱրմՍՍՐ. 1948. Վըժ. 2. Ս. 3-55.
3. *Շամոյան Փ.Ա.* - ԻզՎ. ԱՆ ԱրմՍՍՐ. Մաթեմատիկա. 1978. Թ. 13. N 5-6. Ս. 405-422.