ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 107 2007 № 4

Ì ÀÒÅ Ì ÀÒÈ ÊÀ

УДК 517.968.23

À. Ã. Êàìàëÿí

Í åêîòîðûå ñâîéñòâà ÿäåð òåïëèöåâûõ îïåðàòîðîâ

(Представлено академиком А.Б. Нерсесяном 3/VII 200)

Êëþ÷åâûå ñëîâà: *матрица-функция, теплицев оператор, индексное подпространство*

1. Как известно, задача построения факторизации матрицы-функции сводится к описанию ядер соответствующих теплицевых операторов. В частности, частные индексы матрицы-функции полностью определяются структурой ядер этих операторов (см. например [1-3]). В данной работе изучаются некоторые структурные свойства ядер теплицевых операторов при общих предположениях относительно их символов.

Пусть Γ совокупность конечного числа замкнутых непересекающихся жордановых спрямляемых кривых, ограничивающих многосвязную область $\Omega^+(\ni 0)$, и $\Omega^-(\ni \infty)$ дополнение к $\bar{\Omega}^+$ в расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$, E_p^+ $\left(E_p^-\right)$ 1 **6** p **6** ∞ — класс Смирнова в Ω^+ (Ω^-), $\overset{\circ}{E}{}_p^-$ — класс функций из E_p^-, исчезающих в бесконечности, $L_p^\pm$ $\left(\overset{\circ}{L}{}_p^-\right)$ подпространство функций из L_p $(= L_p(\Gamma))$, совпадающих почти всюду на Γ с угловыми предельными значениями некоторой функции из $E_p^\pm$ $\left(\overset{\circ}{E}{}_p^\pm\right)$, $\mathcal{P}_+$ $(\mathcal{P}_-)$ — оператор, проектирующий прямую сумму $\mathcal{L}_p = L_p^+ + \overset{\circ}{L}{}_p^-$ на L_p^+ $\left(\overset{\circ}{L}{}_p^-\right)$ параллельно $\overset{\circ}{L}{}_p^-$ $\left(L_p^+\right)$ (см. [3-4]). Действие проекторов $\mathcal{P}_\pm$ на вектор-функции и матрице-функции (далее в.-ф. и м.-ф.) определяется покомпонентно. Ниже через τ_a^+ $(a \in \mathbb{C})$, τ_a^- $\left(a \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}\right)$ мы обозначаем операторы сдвига, действующие на функцию f (соответственно в.-ф. и м.-ф.) по формулам $(\tau_a^+ f)(t) = (t-a)f(t)$, $\tau_a^- = -\frac{1}{a}\ \tau_a^+ \left(\tau_0^+\right)^{-1}$. В частности подразумевается, что $\tau_\infty^- = \left(\tau_0^+\right)^{-1}$. Далее, X^n $(X^{n\times m})$ означает пространство вектор-столбцов (матриц) порядка n $(n \times m)$ с элементами из линейного пространства X.

Пусть G — м.-ф. порядка $n \times n$, элементы которой почти всюду на контуре Г принимают конечные комплексные значения. Через $\mathcal{D}_p^+ \ \left(= \mathcal{D}_p^+(G)\right)$, 1 **6** p **6** ∞ обозначим пространство всех в.-ф. $\varphi_+ \in \left(L_p^+\right)^n$ таких, что $G\varphi_+ \in \mathcal{L}_p^n$, а через $\mathcal{D}_p^- \ \left(= \mathcal{D}_p^-(G)\right)$ — пространство всех в.-ф. $\varphi_- \in \left(L_p^-\right)^n$, для которых существует $\varphi \in \mathcal{L}_p^n$ такое, что $\varphi_- = G\varphi$. Заметим, что $\mathcal{D}_p^\pm \left(\left(\tau_0^+\right)^k G\right) = \mathcal{D}_p^\pm(G)$ $(k \in \mathrm{Z})$.

Рассмотрим оператор Теплица $T_p(G)$, 1 **6** p **6** ∞, действующий в пространстве $\left(L_p^+\right)^n$ с областью определения $\mathcal{D}_p^+$ и определенный равенством $T_p(G)\varphi_+ = \mathcal{P}_+ \left(G\varphi_+\right) \ \left(\varphi_+ \in \mathcal{D}_p^+\right)$. Пространство $Ker\, T_p \left(\left(\tau_0^+\right)^{-j} G\right)$ $(j \in \mathrm{Z})$ обозначим через $\mathcal{N}_{p,j}^+$. Если $\varphi_+ \in \mathcal{N}_{pj}^+$ $(j \in \mathrm{Z})$, то в.-ф. $\varphi_- = \left(\tau_0^+\right)^{-j+1} G\varphi_+$ назовем j-двойственной к φ_+. Если $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}_{p,j}^+$, то множество в.-ф., j-двойственных к элементам $\mathcal{M}$, назовем j-двойственным к $\mathcal{M}$. Пространство, j-двойственное к $\mathcal{N}_{pj}^+$, обозначим через $\mathcal{N}_{pj}^-$.

2. Для произвольных $\alpha_+, \beta_+ \in \mathrm{C}, \alpha_-, \beta_- \in \bar{\mathrm{C}} \setminus \{0\}$ имеет место

$$\mathcal{N}_{p,j}^\pm + \tau_{\alpha^\pm}^\pm \mathcal{N}_{p,j}^\pm = \mathcal{N}_{p,j}^\pm + \tau_{\beta_\pm}^\pm \mathcal{N}_{p,j}^+. \tag{1}$$

Справедливо также следующее утверждение.

Òåîðåìà 1. *Если* $\varphi_+ \in \mathcal{N}_{p,j+1}^+$ *и* $\left(\tau_\alpha^+\right)^{-1} \varphi_+ \in \mathcal{D}_p^+$ *при некотором* $\alpha \in \bar{\Omega}^+$, *то* $\left(\tau_\alpha^+\right)^{-1} \varphi_+ \in \mathcal{N}_{p,j}^+$. *Аналогично, если* $\varphi_- \in \mathcal{N}_{p,j+1}^-$ *и* $\left(\tau_\alpha^-\right)^{-1} \varphi_- \in \mathcal{D}_p^-$ *при некотором* $\alpha \in \Omega^-$, *то* $\left(\tau_\alpha^-\right)^{-1} \varphi_- \in \mathcal{N}_{p,j}^-$.

Äîêàçàòåëüñòâî. Пусть $\varphi_+ \in \mathcal{N}_{p,j+1}^+$, $\alpha \in \bar{\Omega}^+$ и $\left(\tau_\alpha^+\right)^{-1} \varphi_+ \in \mathcal{D}_p^+$. Существуют $\psi_+ \in \left(L_p^+\right)^n$ и $\psi_- \in \left(\overset{\circ}{L}{}_p^-\right)^n$ такие, что $\left(\tau_0^+\right)^{-(j+1)} G\varphi_+ - \tau_\alpha^+ \psi_- = \tau_\alpha^+ \psi_+$. Так как левая часть равенства принадлежит $\left(L_p^-\right)^n$, а правая часть $\left(L_p^+\right)^n$, то $\psi_+ = 0$. В силу $\varphi_+ \in \mathcal{N}_{p,j+1}^+$ имеем $\tau_\alpha^+ \psi_- \in \left(\overset{\circ}{L}{}_p^-\right)^n$. Следовательно $\left(\tau_\alpha^+\right)^{-1} \varphi_+ \in \mathcal{N}_{p,j}^+$. Второе утверждение теоремы доказывается аналогичными рассуждениями.¤

Условимся подпространство $\hat{\mathcal{N}}_{p,j}^\pm := \mathcal{N}_{p,j}^\pm + \tau_0^\pm \mathcal{N}_{p,j}^\pm$ называть $(p,j)_\pm$-наследственным подпространством м.-ф. G, а его произвольное прямое дополнение $\mathcal{M}_{p,j}^\pm$ в $\mathcal{N}_{p,j+1}^\pm$ - $(p,j)_\pm$-индексным подпространством. Таким образом

$$\mathcal{N}_{p,j+1}^\pm = \hat{\mathcal{N}}_{p,j}^\pm \dot{+} \mathcal{M}_{p,j}^\pm. \tag{2}$$

Легко видеть, что $\hat{\mathcal{N}}_{p,j}^-$ является $(j+1)$-двойственным к $\hat{\mathcal{N}}_{p,j}^+$ множеством. Изучим теперь вопрос двойственности $(p,j)_\pm$-индексных подпространств м.-ф. G.

Через $\overset{\circ}{\mathcal{N}}{}_{p,-\infty}^+$ обозначим множество всех $\varphi_+ \in \left(L_p^+\right)^n$ таких, что $\left(G\varphi_+\right)(t) = 0$ п.в. на контуре Г. Нетрудно видеть, что $\overset{\circ}{\mathcal{N}}{}_{p,-\infty}^+ = \bigcap\limits_{j \in \mathrm{Z}} \mathcal{N}_{p,j}^+$.

Справедливо следующее утверждение.

Òåîðåìà 2. *Множество,* $(j+1)$*-двойственное к* $(p,j)_+$*-индексному подпространству м.-ф.* G*, является* $(p,j)_-$*-индексным подпространством м.-ф.*

G. Обратно, для любого $(p,j)_-$-индексного подпространства $\mathcal{M}^-_{p,j}$ м.-ф. G существует $(p,j)_+$-индексное подпространство м.-ф. G, $(j+1)$-двойственное множество которого совпадает с $\mathcal{M}^-_{p,j}$. Кроме того размерности $(p,j)_+$ и $(p,j)_-$-индексных подпространств совпадают при всех $j \in \mathrm{Z}$.

Äîêàçàòåëüñòâî. Пусть $\mathcal{M}^+_{p,j}$ $(p,j)_+$-индексное подпространство м.-ф. G, а $\mathcal{M}^-_{p,j}$ его $(j+1)$-двойственное множество. Очевидно, что $\mathcal{M}^-_{p,j} \subset \mathcal{N}^-_{p,j+1}$. Пусть $\varphi_- \in \hat{\mathcal{N}}^-_{p,j} \bigcap \mathcal{M}^-_{p,j}$. Тогда существуют $\varphi_+ \in \mathcal{M}^\pm_{p,j}$, $\psi_+ \in \hat{\mathcal{N}}^+_{p,j}$ такие, что $\varphi_- = \left(\tau^+_0\right)^{-j} G\varphi_+ = \left(\tau^+_0\right)^{-j} G\psi_+$. Следовательно, $\varphi_+ - \psi_+ \in \overset{\circ}{\mathcal{N}}{}^{+}_{p,-\infty}$, Так как $\varphi_+ \in \hat{\mathcal{N}}^+_{p,j} \bigcap \mathcal{M}^+_{p,j}$, то $\varphi_+ = 0$ и потому $\varphi_- = 0$. Пусть теперь $\varphi_- \in \mathcal{N}^-_{p,j+1}$. Тогда существуют $\psi_+ \in \hat{\mathcal{N}}^+_{p,j}$, $\varphi_+ \in \mathcal{M}^+_{p,j}$ такие, что $\varphi_- = \left(\tau^+_0\right)^{-j} G\left(\psi_+ + \varphi_+\right)$. Так как $\left(\tau^+_0\right)^{-j} G\psi_+ \in \hat{\mathcal{N}}^-_{p,j}$, а $\left(\tau^+_0\right)^{-j} G\varphi_+ \in \mathcal{M}^-_{p,j}$, то $\mathcal{N}^-_{p,j+1} = \hat{\mathcal{N}}^-_{p,j} + \mathcal{M}^-_{p,j}$ и $\hat{\mathcal{N}}^-_{p,j} \bigcap \mathcal{M}^-_{p,j} = \{0\}$.

Пусть теперь $\mathcal{M}^-_{p,j}$ некоторое $(p,j)_-$-индексное подпространство м.-ф. G, $\tilde{\mathcal{M}}^+_{p,j} = \left\{\varphi_+ \in \mathcal{N}^+_{p,j+1};\ \left(\tau^+_0\right)^{-j} G\varphi_+ \in \mathcal{M}^-_{p,j}\right\}$, а $\mathcal{M}^+_{p,j}$ некоторое прямое дополнение $\overset{\circ}{\mathcal{N}}{}^{+}_{p,-\infty}$ в пространстве $\tilde{\mathcal{M}}^+_{p,j}$. Очевидно $(j+1)$-двойственное множество к $\mathcal{M}^+_{p,j}$ совпадает с $\mathcal{M}^-_{p,j}$. Если $\varphi_+ \in \mathcal{M}^+_{p,j} \bigcap \hat{\mathcal{N}}^+_{p,j}$, то $\left(\tau^+_0\right)^{-1} G\varphi_+ \in \mathcal{M}^-_{p,j} \bigcap \hat{\mathcal{N}}^-_{p,j}$ и $\varphi_+ \in \overset{\circ}{\mathcal{N}}{}^{+}_{p,-\infty}$. Следовательно $\varphi_+ = 0$. Пусть теперь $\varphi_+ \in \mathcal{N}^+_{p,j+1}$. Поскольку $\left(\tau^+_0\right)^{-j} G\varphi_+ \in \mathcal{N}^-_{p,j+1}$, то существуют $\psi_- \in \hat{\mathcal{N}}^-_{p,j}$ и $\varphi_- \in \mathcal{M}^-_{p,j}$ такие, что $\left(\tau^+_0\right)^{-j} G\varphi_+ = \psi_- + \varphi_-$. Выберем $\psi_+ \in \hat{\mathcal{N}}^+_{p,j}$ и $\tilde{\varphi}_+ \in \tilde{\mathcal{M}}^+_{p,j}$ таким образом, чтобы ψ_- и φ_- являлись $(j+1)$-двойственными соответственно к ψ_+ и $\tilde{\varphi}_+$ в.-ф. Легко видеть, что $\varphi_+ - \psi_+ - \tilde{\varphi}_+ \in \overset{\circ}{\mathcal{N}}{}^{+}_{p,-\infty}$. Поскольку $\tilde{\varphi}_+ \in \mathcal{M}^+_{p,j} + \overset{\circ}{\mathcal{N}}{}^{+}_{p,-\infty}$, то $\varphi_+ \in \hat{\mathcal{N}}^+_{p,j} + \mathcal{M}^+_{p,j}$. Следовательно $\mathcal{M}^+_{p,j}$ $(p,j)_+$-индексное подпространство м.-ф. G.

Пусть $\mathcal{M}^\pm_{p,j}$ $(j+1)$-двойственные $(p,j)_\pm$-индексные подпространства. Если $\dim \mathcal{M}^-_{p,j} < \dim \mathcal{M}^+_{p,j}$, то существует ненулевая в.-ф. $\varphi_+ \in \mathcal{M}^+_{p,j} \cap \overset{\circ}{\mathcal{N}}_{p,-\infty}$. ¤

3. Перейдем теперь к более детальному исследованию пространств $\mathcal{M}^\pm_{p,j}$. Справедливо следующее утверждение.

Òåîðåìà 3. *Пусть $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_k$ целые числа, в.-ф. $\varphi^+_{i,1}, \ldots, \varphi^+_{i,m_i}$ $(i = 1, \ldots, k$, $m_i \in \mathcal{N})$ принадлежат некоторым $(p,\xi_i)_+$-индексным подпространствам $\mathcal{M}^+_{p,\xi_i}$ м.-ф. G и линейно независимы, а м.-ф. Φ^+ определена равенством $\Phi^+ = \left[\varphi^+_{1,1}, \varphi^+_{1,2}, \ldots, \varphi^+_{1,m_1}, \varphi^+_{2,1}, \ldots, \varphi^+_{k,m_k}\right]$. Тогда если в.-ф. $\left(\tau^+_z\right)^{-1}\Phi^+ v$ принадлежит $\mathcal{D}^+_p$ для некоторого $z \in \bar{\Omega}^+$ и $v \in \mathrm{C}^m$, где $m = m_1 + \cdots + m_k$, то $v = 0$.*

Äîêàçàòåëüñòâî. Пусть $v = [\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1,m_1}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{k,m_k}] \in \mathrm{C}^m$ отличный от нуля вектор такой, что при некотором $z \in \bar{\Omega}^+$, $\psi^+_0 := \Phi^+ v \in \mathcal{D}^+_p$, а s — максимальное число из множества $\{1, 2, \ldots, k\}$, обладающее тем свойством, что $\alpha_{s,j} \neq 0$ хотя бы для одного j из множества $\{1, \ldots, m_s\}$. Пусть $\psi^+_1 := \left(\tau^+_z\right)^{-1}\psi^+_0$. Из теоремы 1 следует, что $\psi^+_1 \in \mathcal{N}^+_{p,\xi_s}$. Поскольку правая часть равенства $\sum\limits_{j=1}^{m_s} \alpha_{s,j}\varphi^+_{s,j} = -\sum\limits_{i=1}^{s-1}\sum\limits_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}\varphi^+_{ij} + \tau^+_z\psi^+_1$ принадлежит подпространству $\hat{\mathcal{N}}_{p,\xi_s}$, а левая часть $\mathcal{M}_{p,\xi_s}$, то обе части тождественно равны нулю. В частности $\alpha_{s,1} = \ldots \alpha_{s,m_s} = 0$, что противоречит определению числа s. ¤

Ñëåäñòâèå 1. *Для любого* $z \in \Omega^+$ *справедливо равенство* $rang\Phi^+(z) = m$.

Äîêàçàòåëüñòâî. Действительно, если $z_0 \in \Omega^+$ и $rang\Phi^+(z_0) < m$, то существует ненулевой вектор $v \in \mathrm{C}^m$ такой, что $\Phi^+(z_0)v = 0$. Из аналитичности $\Phi^+(z)v$ следует, что в окрестности точки z_0 имеет место представление $\Phi^+(z)v = (z - z_0)\psi(z)$, где $\psi \in \mathcal{D}_p^+$, что в силу теоремы 3 противоречит условию $v \neq 0$.¤

Аналогичным образом доказываются следующие утверждения.

Òåîðåìà 4. *Пусть* $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_k$ *целые числа, в.-ф.* $\varphi^-_{i,1}, \ldots, \varphi^-_{i,m_i}$ $(i = 1, \ldots, k,\ m_i \in \mathcal{N})$ *принадлежат некоторым* $(p, \xi_i)_-$*-индексным подпространствам м.-ф.* G *и линейно независимы, м.-ф.* Φ^- *определена равенством* $\Phi^- = \left[\varphi^-_{1,1}, \varphi^-_{1,2}, \ldots, \varphi^-_{1,m_1}, \varphi^-_{2,1}, \ldots, \varphi^-_{s,m_s}\right]$. *Тогда, если в.-ф.* $\left(\tau_z^-\right)^{-1}\Phi^- v$ *принадлежит* $\mathcal{D}_p^-$ *для некоторого* $z \in \Omega^-$ *и* $v \in \mathrm{C}^m$, *где* $m = m_1 + \cdots + m_k$, *то* $v = 0$.

Ñëåäñòâèå 2. *Для любого* $z \in \Omega^-$ *справедливо равенство* $rang\Phi^-(z) = m$.

Çàìå÷àíèå 1. Пусть м.-ф. G дополнительно обладает тем свойством, что из условий $\varphi \in \mathcal{L}_p^n$ и $G\varphi = 0$ следует, что $\varphi = 0$. Тогда если $z \in \Gamma$, $\varphi \in \mathcal{N}^-_{p,j+1}$ и $\left(\tau_z^-\right)^{-1}\varphi_- \in \mathcal{D}_p^-$, то $\left(\tau_z^-\right)^{-1}\varphi_- \in \mathcal{N}^-_{p,j}$ (см. теорему 1). Кроме того, для таких м.-ф. теорема 4 остается справедливой и для $z \in \Gamma$.

Справедливо также следующее утверждение.

Òåîðåìà 5. *За исключением, быть может, конечного числа* $j \in \mathrm{Z}$ *все* $(p, j)_\pm$*-индексные подпространства являются нулевыми. Кроме того для произвольного набора* $(p, j)_\pm$ *индексных подпространств* $\mathcal{M}^\pm_{p,j}$ *справедливо неравенство* $\hat{n} := \sum\limits_{j \in \mathrm{Z}} \dim \mathcal{M}^\pm_{p,j}$ **6** n.

Äîêàçàòåëüñòâî. Из теоремы 2 следует, что $\sum\limits_{j \in \mathrm{Z}} \dim \mathcal{M}^+_{p,j} = \sum\limits_{j \in \mathrm{Z}} \dim \mathcal{M}^-_{p,j}$. Условие $\hat{n} > n$ означает, что существуют числа $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_k$ и линейно независимые в.-ф. $\varphi^+_{i,1}, \ldots, \varphi^+_{i,m_i}$ $(i = 1, \ldots, k)$, принадлежащие $\mathcal{M}^+_{p,\xi_i}$, такие, что $m = m_1 + m_1 + \cdots + m_k > n$. Последнее противоречит следствию 1.¤

Ñëåäñòâèå 3. *Либо* $\dim\mathcal{N}^+_{p,j} = \infty$ $(\dim\mathcal{N}^-_{p,j} = \infty)$ *для всех* $j \in \mathrm{Z}$, *либо* $\dim\mathcal{N}^+_{p,j} < \infty$ $(\dim\mathcal{N}^-_{p,j} < \infty)$ *для всех* $j \in \mathrm{Z}$. *Если* $\dim\mathcal{N}^+_{p,k} < \infty$ $(\dim\mathcal{N}^-_{p,k} < \infty)$ *при некотором* k, *то существует* k_0 *такое, что* $\dim\mathcal{N}^+_{p,j} = 0$ $(\dim\mathcal{N}^-_{p,j} = 0)$ *как только* j **6** k_0.

Äîêàçàòåëüñòâî. Первое утверждение следует из теоремы 5 и равенства (2). Если $\dim\mathcal{N}^\pm_{p,k} < \infty$, то существует k_0 такое, что $\dim\mathcal{N}^\pm_{p,j} = \dim\mathcal{N}^\pm_{p,k_0}$, как только j **6** k_0, т.е. $\mathcal{N}^\pm_{p,k_0} = \bigcap\limits_{j \in \mathrm{Z}} \mathcal{N}^\pm_{p,j}$. Пусть $\varphi^+ \in \mathcal{N}^+_{p,k_0}$, $\varphi^+ \neq 0$. Следовательно $\tau^m\varphi^+ \in \mathcal{N}^+_{p,0}$ (m **>** 0), что противоречит условию $\dim\mathcal{N}^+_{p,0} < \infty$. Пусть теперь $\varphi^- \in \mathcal{N}^-_{p,k_0}$, $\varphi_- \neq 0$. Тогда существуют в.-ф. $\varphi^+_m \in \left(L_p^+\right)^n$ (m **6** 0) такие, что $\tau^m\varphi^- = G\varphi^+_m \in \mathcal{N}^-_{p,1}$. Последнее противоречит условию $\dim\mathcal{N}^-_{p,1} < \infty$.¤

4. Перейдем к локальному исследованию пространств $\mathcal{N}^\pm_{p,j}, \mathcal{M}^\pm_{p,j}$ $(j \in \mathrm{Z})$. Подпространства $\mathcal{N}^+_{p,j}(z)$, $\mathcal{M}^+_{p,j}(z)$ для $z \in \Omega^+$ и $\mathcal{N}^-_{p,j}(z)$, $\mathcal{M}^-_{p,j}(z)$ для $z \in \Omega^-$, пространства C^n определим следующим образом: $\mathcal{N}^\pm_{p,j}(z) = \left\{\varphi^\pm(z);\ \varphi^\pm \in \mathcal{N}^\pm_{p,j}\right\}$,

$\mathcal{M}^{\pm}_{p,j}(z) = \{\varphi^{\pm}(z)\,;\ \varphi^{\pm} \in \mathcal{M}^{\pm}_{p,j}\}$. Точку $z_0 \in \bar{\mathrm{C}} \setminus \Gamma$ назовем s-точкой для м.-ф. G, если для некоторого $j \in \mathrm{Z}$

$$\dim \mathcal{N}^{\pm}_{p,j}(z_0) < \max_{z \in \Omega^{\pm}} \dim \mathcal{N}^{\pm}_{p,j}(z) \qquad \left(z_0 \in \Omega^{\pm}\right) \tag{3}$$

Справедливо следующее утверждение.

Òåîðåìà 6. *Для произвольного $j \in \mathrm{Z}$ справедливы равенства*

$$\mathcal{N}^{\pm}_{p,j}(z) \dot{+} \mathcal{M}^{\pm}_{p,j}(z) = \mathcal{N}^{\pm}_{p,j+1}(z) \qquad \left(z \in \Omega^{\pm}\right)\,. \tag{4}$$

Для любого $z \in \Omega^{\pm}$ имеет место равенство $\dim \mathcal{M}^{\pm}_{p,j}(z) = \dim \mathcal{M}^{\pm}_{p,j}$. Множество s-точек в $\Omega^{\pm}$ не более чем счетно и не имеет предельных точек в $\Omega^{\pm}$. Если одно из неравенств (3) имеет место при некотором j, то оно справедливо при всех j.

Äîêàçàòåëüñòâî. Пусть $z \in \Omega^{\pm}$ и $y \in \mathcal{N}^{\pm}_{p,j+1}(z)$. Тогда существует $\varphi^{\pm} \in \mathcal{N}^{\pm}_{p,j+1}$ такое, что $\varphi^{\pm}(z) = y$. Из равенств (1), (2) следует существование $\varphi^{\pm}_1, \varphi^{\pm}_2 \in \mathcal{N}^{\pm}_{p,j}$ и $\psi^{\pm} \in \mathcal{M}^{\pm}_{p,j}$ таких, что $\varphi^{\pm} = \varphi^{\pm}_1 + \tau^{\pm}_z \varphi^{\pm}_2 + \psi^{\pm}$. Следовательно $y = \varphi^{\pm}_1(z) + \psi^{\pm}(z)$.

Пусть $y \in \mathcal{N}^{\pm}_{p,j}(z) \bigcap \mathcal{M}^{\pm}_{p,j}(z)$. Тогда существуют $\varphi^{\pm} \in \mathcal{N}^{\pm}_{p,j}$ и $\psi^{\pm} \in \mathcal{M}^{\pm}_{p,j}$ такие, что $y = \varphi^{\pm}(z) = \psi^{\pm}(z)$. Поскольку $\psi^{\pm} - \varphi^{\pm} \in \mathcal{N}^{\pm}_{p,j+1}$ и $\psi^{\pm}(z) - \varphi^{\pm}(z) = 0$, то в силу теоремы 1 $\left(\tau^{\pm}_z\right)^{-1}\left(\psi^{\pm} - \varphi^{\pm}\right) \in \mathcal{N}^{\pm}_{p,j}$, т.е. $\psi^{\pm} = \varphi^{\pm} + \tau^{\pm}_z \varphi^{\pm}_1 \in \hat{\mathcal{N}}^{\pm}_{p,j}$. Следовательно ψ=0, потому y=0. Постоянство чисел $\dim \mathcal{M}^{\pm}_{p,j}(z)$ следует из следствий 1 и 2.

Пусть $z_0 \in \Omega^{\pm}$ и $\max\limits_{z \in \Omega^{\pm}} \dim \mathcal{N}^{\pm}_{p,j}(z) = \dim \mathcal{N}^{\pm}_{p,j}(z_0) = m$. Тогда существуют $\varphi^{\pm}_k \in \mathcal{N}^{\pm}_{p,j}$ $(k = 1, \ldots, m)$ такие, что векторы $\varphi^{\pm}_k(z_0)$ линейно независимы. Тогда м.-ф. $\left[\varphi^{\pm}_1, \ldots, \varphi^{\pm}_m\right]$ обладает минором порядка m, отличным от нуля в точке z_0. Применив теорему единственности к этой аналитической функции, получим доказательство требования относительно s-точек. Последнее утверждение теоремы следует из равенств (4) и постоянства чисел $\dim \mathcal{M}^{\pm}_{p,j}(z)$. ¤

Следующая теорема описывает структуру пространств $\mathcal{N}^{\pm}_{p,j}$.

Òåîðåìà 7. *Пусть $k < i$ $(k, i \in \mathrm{Z})$ и $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_s$ все возможные целые значения j (k* **6** *$j < i$), для которых $(p,j)_{\pm}$-индексные подпространства ненулевые. Тогда*

$$\begin{gathered}\mathcal{N}^{\pm}_{p,i} = \left(\mathcal{N}^{\pm}_{p,k} + \tau^{+}_0 \mathcal{N}^{\pm}_{p,k} + \cdots + \left(\tau^{+}_0\right)^{i-k} \mathcal{N}^{\pm}_{p,k}\right) \dot{+} \mathcal{M}^{\pm}_{p,\xi_1} \dot{+} \tau^{+}_0 \mathcal{M}^{\pm}_{p,\xi_1} \dot{+} \\ \cdots + \left(\tau^{+}_0\right)^{i-\xi_1-1} \mathcal{M}^{\pm}_{p,\xi_1} \dot{+} \mathcal{M}^{\pm}_{p,\xi_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \left(\tau^{+}_0\right)^{i-\xi_s-1} \mathcal{M}^{\pm}_{p,\xi_s},\end{gathered} \tag{5}$$

где $\mathcal{M}^{\pm}_{p,\xi_m}$ $(m = 1, \ldots, s)$ произвольные $(p, \xi_m)_{\pm}$-индексные подпространства.

Äîêàçàòåëüñòâî. Из равенства (2) следует, что пространство $\mathcal{N}^{\pm}_{p,i}$ может быть представлено в виде суммы пространств, присутствующих в правой части равенства (5). Пусть теперь $\varphi^{+}_{0,m} \in \mathcal{N}^{+}_{p,k}$ $(m = 0, 1, \ldots, i-k)$, $\varphi^{+}_{j,m} \in \mathcal{M}^{+}_{p,\xi_j}$ $(j = 1, \ldots, s;\ m = 0, \ldots, i - \xi_j - 1)$ и

$$\sum_{m=0}^{i-k} \left(\tau^{+}_0\right)^m \varphi^{+}_{0,m} + \sum_{j=1}^{s} \sum_{m=0}^{i-\xi_j-1} \left(\tau^{+}_0\right)^m \varphi^{+}_{j,m} = 0\,. \tag{6}$$

Из равенства (4) следует, что $\mathcal{N}_{p,i}^{+}(0) = \mathcal{N}_{p,k}^{+}(0) \dot{+} \mathcal{M}_{p,\xi_1}^{+}(0) \dot{+} \cdots \dot{+} \mathcal{M}_{p,\xi_s}^{+}(0)$. Отсюда, записав равенство (6) в точке $z = 0$, получим $\varphi_{00}^{+}(0) = \varphi_{1,0}^{+}(0) = \cdots = \varphi_{s,0}^{+}(0) = 0$. Из следствия 1 и теоремы 1 имеем $\varphi_{1,0}^{+} = \cdots = \varphi_{s,0}^{+} = 0$ и $\varphi_{00}^{+} = \tau_0^{+}\grave{\varphi}_{00}^{+}$, где $\grave{\varphi}_{00}^{+} \in \mathcal{N}_{p,k-1}^{+}$. Равенство (6) принимает вид

$$\grave{\varphi}_{00}^{+} + \sum_{m=1}^{i-k} \left(\tau_0^{+}\right)^{m-1} \varphi_{0,m}^{+} + \sum_{j=1}^{s} \sum_{m=1}^{i-\xi_j-1} \left(\tau_0^{+}\right)^{m-1} \varphi_{j,m}^{+} = 0,$$

где последнее слагаемое в левой части в случае $i = \xi_s + 1$ исчезает. Последовательно повторяя аналогичную процедуру, получим, что $\varphi_{j,m}^{+} = 0$ при всех $j = 1, \ldots, s$; $m = 0, \ldots, i - \xi_j - 1$, и $\varphi_{00}^{+} + \tau_0^{+}\varphi_{0,1}^{+} + \cdots + \left(\tau_0^{+}\right)^{i-k} \varphi_{0,m}^{+} = 0$. Равенство (5) для пространства $\mathcal{N}_{p,i}^{\pm}$ доказывается аналогично. ¤

Çàìå÷àíèå 2. Переобозначим оператор $\mathcal{T}_p(G)$ через $\mathcal{T}_{r_+,p}(G)$. Наряду с оператором $\mathcal{T}_{r_+,p}(G)$ могут быть рассмотрены операторы $\mathcal{T}_{\ell_+,p}(G)$, $\mathcal{T}_{r_-,p}(G)$, $\mathcal{T}_{\ell_-,p}(G)$, действующие по формулам $\mathcal{T}_{\ell_+,p}(G)\varphi = \mathcal{P}_+\left((\varphi^t G)^t\right)$, $\mathcal{T}_{r_-,p}(G)\varphi = \mathcal{P}_-(G\varphi)$, $\mathcal{T}_{\ell_-,p}(G)\varphi = \mathcal{P}_-\left((\varphi^t G)^t\right)$ и определенные на естественных для этих операторов областях определения. Ядра операторов $\mathcal{T}_{\ell_+,p}\left(\left(\tau_0^{+}\right)^{-j} G\right)$, $\mathcal{T}_{r_-,p}\left(\left(\tau_0^{+}\right)^{-j} G\right)$, $\mathcal{T}_{\ell_-,p}\left(\left(\tau_0^{+}\right)^{-j} G\right)$ обладают свойствами, аналогичными вышеприведенным.

Ереванский государственный университет

À. Ã. Êàìàëÿí

Íåêîòîðûå ñâîéñòâà ÿäåð òåïëèöåâûõ îïåðàòîðîâ

Рассматривается семейство теплицевых операторов с матричными символами вида $t^{-j}G$, $j \in \mathrm{Z}$. Для ядер теплицевых операторов введены понятия индексных и наследственных подпространств. Изучены свойства этих подпространств, а также структура и взаимосвязь ядер теплицевых операторов.

Ա. Հ. Քամալյան

Տյոպլիցյան օպերատորների կորիզների որոշ հատկություններ

Դիտարկված է $t^{-j}G$, $j \in \mathrm{Z}$ տեսքի մատրիցային սիմվոլներով տյոպլիցյան օպերատորների ընտանիք: Տյոպլիցյան օպերատորների կորիզների համար ներմուծված են ինդեքսային և

ժառանգական ենթատարածությունների հասկացությունները: Ուսումնասիրված են այդ ենթա-տարածությունների հատկությունները, ինչպես նաև տյոպլիցյան օպերատորների կառուցվածքը և փոխկապակցվածությունը:

A. H. Kamalyan

Some Properties of Kernels of Toeplitz Operators

The family of Toeplitz operators with the $t^{-j}G$, $j \in \mathbb{Z}$, type matrix-valued symbols is considered. Conceptions of indexal and inherited subspaces for kernels of Toeplitz operators are entered. Properties of these subspaces and structures and interconnection of kernels of Toeplitz operators are investigated.

Ëèòåðàòóðà

1. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. Наука. 1971.

2. *Clancey K., Gohberg I.* Factorization of matrix functions and singular integral operators, BirkhËuser Verlag, Basel. 1981.

3. *Litvinchuk G. S., Spitkovskii I. M.* Factorisation of Measurable Matrix Function, Akademie – Verlag, Berlin. 1987.

4. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. М.-Л., ГИТЛ. 1950.