ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 107 2007 № 4

Ì ÀÒÅ Ì ÀÒÈ ÊÀ

УДК 515.1

Ý. À. Ìèðçàõàíÿí, Í. Ý. Ìèðçàõàíÿí

Àëüòåðíàòèâíûå îïðåäåëåíèÿ áåñêîíå÷íîìåðíûõ ãîìîòîïè÷åñêèõ ãðóïï ïîäìíîæåñòâ ãèëüáåðòîâà ïðîñòðàíñòâà

(Представлено чл.-кор. НАН РА Г.Г. Геворкяном 27/VII 2007)

Êëþ÷åâûå ñëîâà: *альтернативные бесконечномерные топологии, гильбертово пространство, конечный дефект, изоморфизм*

Статья посвящена бесконечномерной гомотопической топологии вещественного гильбертова пространства H. Приведены альтернативные определения бесконечномерных абсолютных и относительных гомотопических групп подмножеств и пар подмножеств из H. Допустимыми являются отображения, принадлежащие одному специальному классу K_0 непрерывных отображений (K_0-отображений) подмножеств из H.

Определения основных понятий и свойства класса K_0 содержатся в [1,2].

Сначала необходимо кратко привести основные определения (подробнее см. [3]).

Пусть H - произвольное, но зафиксированное, действительное гильбертово пространство. Напомним, что линейное подпространство M пространства H называется подпространством конечного дефекта (или конечной коразмерности) $q \geq 0$, если ортогональное дополнение $M^{\perp}$ подпространства M относительно H имеет размерность q; если q - отрицательное целое число, то гильбертово пространство M будем называть по отношению к H надпространством дефекта q, если M содержит H в качестве своего подпространства дефекта $(-q)$.

Условимся через $B(M)$, $B^{*}(M)$ и $S(M)$ обозначать соответственно единичные замкнутый, открытый шары и единичную сферу подпространства или надпространства M пространства H.

Пусть (X, x_0) - пара, состоящая из произвольного подмножества X из H и некоторой точки $x_0 \in X$. Такие пары принято называть множеством с отмеченной точкой или пунктированным множеством.

Î ïðåäåëåíèå 1. *K_0-отображение $f : (M, M\backslash B(M)) \to (X, x_0)$ относительно гильбертова пространства $M \cup H$, переводящее M в X, а $M\backslash B(M)$ в точку x_0, будем называть K_0-сфероидом дефекта $q \in Z$ множества X в точке x_0.*

Множество всех таких сфероидов будем обозначать символом $K_0(M, M\backslash B(M); X, x_0)$. Выбрав в M произвольный единичный вектор a, определим сумму двух сфероидов f, g из $K_0(M, M\backslash B(M); X, x_0)$, положив

$$(f+g)(x) = \begin{cases} f(2x+a) & \text{при} \quad (x,a) \le 0, \quad x \in M, \\ g(2x-a) & \text{при} \quad (x,a) \ge 0, \quad x \in M. \end{cases}$$

Определим понятие K_0-гомотопности двух сфероидов f, g из $K_0(M, M\backslash B(M); X, x_0)$. С этой целью обозначим через R числовую прямую, а через I - отрезок $[0,1]$. Декартово произведение $M' = R \times M$ можно рассматривать как гильбертово пространство, для которого M является подпространством дефекта 1. По отношению к исходному пространству H пространство M' можно рассматривать как подпространство дефекта $q-1$ (для этого в случае $q > 0$ следует за R принять любую содержащуюся в H прямую, проходящую через нуль и ортогональную к F).

Î ïðåäåëåíèå 2. *Отображение $\Phi : I \times M \to X$ мы будем называть K_0-гомотопией сфероидов, если оно принадлежит классу K_0 в гильбертовом пространстве $M' \cup H$ и, кроме того, для любого $t \in I$ отображение $\varphi_t : M \to X$, определяемое равенством $\varphi_t(x) = \Phi(t, x)$, $x \in M$ является K_0-сфероидом дефекта q множества X в точке x_0, т.е. принадлежит множеству $K_0(M, M\backslash B(M); X, x_0)$.*

Если при этом $\varphi_0 = f$ и $\varphi_1 = g$, то будем говорить, что K_0-гомотопия Φ соединяет сфероиды f и g. Два сфероида, которые можно соединить K_0-гомотопией сфероидов, называются K_0-гомотопными. Сумма сфероидов с точностью до K_0-гомотопности не зависит от выбора единичного вектора $a \in M$. Далее отношение K_0-гомотопности K_0-сфероидов f, g есть отношение эквивалентности в множестве $K_0(M, M\backslash B(M); X, x_0)$. Соответствующее фактор-множество будем обозначать символом $K_0[M, M\backslash B(M); X, x_0]$. Класс эквивалентности сфероида f будем называть K_0-гомотопическим классом f и обозначать через $[f]$; операция сложения сфероидов корректно распространяется на K_0-гомотопические классы и формула $[f] + [g] = [f + g]$ дает групповую операцию в $K_0[M, M\backslash B(M); X, x_0]$. Полученная абелева группа обозначается через $\prod_q^M(X, x_0)$. Нулем этой группы является класс постоянного сфероида. Для сфероида f противоположным ему сфероидом будем называть сфероид $g=-f$, который симметричен к f относительно гиперплоскости Γ_0 подпространства M, определяемой равенством $(x,a)=0$, т.е. $f(x)=g(y)$ при выполнении условий $x+y\in\Gamma_0$, $x-y\perp\Gamma_0$. Таким образом, имеем $-[f]=[-f]$. Доказывается, что группа $\prod_q^M(X,x_0)$ с точностью до изоморфизма не зависит от выбора M.

Это позволяет запись $\prod_q^M(X,x_0)$ сократить до записи $\prod_q(X,x_0)$ и группу $\prod_q(X,x_0)$ называть K_0-бесконечномерной абсолютной гомотопической группой дефекта $q\in Z$ множества X в точке x_0.

Перейдем теперь к рассмотрению бесконечномерных относительных гомотопических групп.

Пусть M, как и в абсолютном случае, снова есть подпространство или надпространство дефекта $q\in Z$ гильбертова пространства H. Выберем некоторый единичный вектор $e\in M$ и обозначим через M_e подпространство из M, ортогональное к прямой $L_e\subset M$, проходящей через e. Положим

$$J^e(M)=\{x\in M:(x,e)\geq 0, x\notin L_e\times B^*(M_e)\}\cup\{x\in M\backslash B^*(M):(x,e)\leq 0\}.$$

Пусть (X,A,x_0) - тройка, состоящая из произвольного множества $X\subseteq H$, его подмножества $A\subseteq X$ и точки $x_0\in A$; такую тройку называют парой с отмеченной точкой или пунктированной парой.

Îïðåäåëåíèå 3. *Отображение* $f:(M,M\backslash B(M);J^e(M))\rightarrow(X,A,x_0)$, *принадлежащее классу* K_0 *(относительно гильбертова пространства* $M\cup H$*), будем называть относительным* K_0*-сфероидом дефекта* $q\in Z$ *пары* (X,A) *в точке* x_0*; множество всех таких сфероидов обозначим через* $K_0(M,M\backslash B(M),J^e(M);(X,A,x_0))_q$.

Выбрав единичный вектор $a\in M_e$, определим сумму двух относительно K_0-сфероидов f,g точно по такой же формуле, что и в абсолютном случае. Далее, соответствующим образом определяются K_0-гомотопии для относительных сфероидов; полученное фактор-множество обозначим через $\prod_q^{M,e,a}(X,A,x_0)$; относительно формулы $[f]+[g]=[f+g]$ множество $\prod_q^{M,e,a}(X,A,x_0)$ превращается в абелеву группу. При этом нулевой элемент и противоположный элемент определяются так же, как в абсолютном случае. Группа $\prod_q^{M,e,a}(X,A,x_0)$ с точностью до изоморфизма не зависит от элементов выбора M,e,a; в результате получаем группу $\prod_q(X,A,x_0)$, которую и назовем K_0-бесконечномерной гомотопической группой дефекта $q\in Z$ пары (X,A) в точке x_0.

Перейдем теперь к описанию некоторых альтернативных (но эквивалентных изложенным выше основным определениям) определений рассматриваемых групп. Сначала рассмотрим абсолютный случай. Пусть по-прежнему M - произвольное линейное подпространство или надпространство дефекта $q\in Z$

пространства H, $B(M)$ и $S(M)$ соответственно единичный замкнутый шар и единичная сфера M и (X, x_0) - пунктированное множество из H.

Обозначим через $K_0(B(M), S(M); X, x_0)$ множество всех отображений $f : (B(M), S(M)) \to (X, x_0)$, принадлежащих к классу K_0 относительно гильбертова пространства $M \cup H$. Введем в множестве $K_0(B(M), S(M); X, x_0)$ отношение K_0-гомотопности $rel(S(M))$. Полученное фактор-множество (обычно называемое гомотопическим множеством) обозначим через $K_0[B(M), S(M); X, x_0]$.

Ïðåäëîæåíèå 1. *Существует биективное соответствие между элементами группы $\prod_q(X, x_0)$ и элементами (K_0-гомотопическими классами) множества $K_0[B(M), S(M); X, x_0]$.*

Ñëåäñòâèå 1. *Перенося посредством этого соответствия групповую операцию из $\prod_q(X, x_0)$ в $K_0[B(M), S(M); X, x_0]$, получим изоморфизм группы $\prod_q(X, x_0)$ на группу $K_0[B(M), S(M); X, x_0]$.*

Таким образом, согласно предложению 1 мы можем символом $\prod_q(X, x_0)$ обозначать также построенную группу $K_0[B(M), S(M); X, x_0]$, т.е. положить $\prod_q(X, x_0) = K_0[B(M), S(M); X, x_0]$ и элементы группы $\prod_q(X, x_0)$ определять так же, как K_0-гомотопические классы относительно сферы $S(M)$ K_0-отображений $f : (B(M), S(M)) \to (X, x_0)$.

Выберем единичный вектор $e \in M$ и обозначим, как и выше, через M_e векторное подпространство всех векторов из M, ортогональных к e; рассмотрим единичную сферу $S(M)$, единичный замкнутый шар $B(M_e)$ и единичную сферу $S(M_e)$. Ясно, что их дефекты соответственно равны $q+1$, $q+1$ и $q+2$. Нижнюю замкнутую полусферу (т.е. содержащую точку $-e$) сферы $S(M)$ обозначим через E и рассмотрим пару $(S(M), E)$. Далее, обозначим через $K_0(S(M), E; X, x_0)$ множества всех отображений $f : (S(M), E) \to (X, x_0)$, принадлежащих классу K_0 относительно гильбертова пространства $M \cup H$, введем в этом множестве отношение K_0-гомотопности $rel(E)$ и получающееся фактор-множество обозначим через $K_0[S(M), E; X, x_0]$.

Ïðåäëîæåíèå 2. *Существует биективное соответствие между элементами группы $\prod_{q+1}(X, x_0) = K_0[B(M_e), S(M_e); X, x_0]$ и элементами гомотопического множества $K_0[S(M), E; X, x_0]$.*

Ñëåäñòâèå 2. *Как и в следствии 1, перенося групповую структуру в $\prod_{q+1}(X, x_0)$ посредством указанного биективного соответствия в $K_0[S(M), E; X, x_0]$, мы можем превратить его в группу, изоморфную группе $\prod_{q+1}(X, x_0)$.*

Таким образом, мы и в данном случае можем писать $\prod_{q+1}(X, x_0) = K_0[S(M), E; X, x_0]$ и элементы группы $\prod_{q+1}(X, x_0)$ определять так же, как K_0-гомотопические классы относительно E K_0-отображений $f : (S(M), E) \to (X, x_0)$. Наконец опишем еще одно альтернативное определение абсолютных гомотопических групп. Сохраняя обозначения предыдущего случая, точку $-e$ полусферы E обозначим через s_0 и рассмотрим пару $(S(M), s_0)$; пусть $K_0(S(M), s_0; X, x_0)$ - множество всех отображений $f : (S(M), s_0) \to (X, x_0)$, принадлежащих классу K_0 относительно гильбертова пространства $M \cup H$.

Введем отношение K_0-гомотопности $rel\{s_0\}$ в $K_0(S(M), s_0; X, x_0)$ и рассмотрим фактор-множество $K_0[S(M), s_0; X, x_0]$.

Ïðåäëîæåíèå 3. *Существует биективное соответствие между гомотопическими множествами $K_0[S(M), E; X, x_0]$ и $K_0[S(M), s_0; X, x_0]$.*

Ñëåäñòâèå 3. *Согласно следствию 2 и предложению 3 множество $K_0[S(M), s_0; X, x_0]$ можно превратить в группу, изоморфную группе $\prod_{q+1}(X, x_0)$.*

Таким образом, элементы группы $\prod_{q+1}(X, x_0)$ можно определить как K_0-гомотопические классы $rel\{s_0\}$ K_0-отображений $f : (S(M), s_0) \to (X, x_0)$.

Подытоживая результаты предложений 1-3, можем при рассмотрении K_0-абсолютных бесконечномерных гомотопических групп кроме основного определения пользоваться любым из трех описанных альтернативных определений этих групп.

Рассмотрим множество $K_0(B(M), S(M), E; X, A, x_0)$ всех отображений $f : (B(M), S(M), E) \to (X, A, x_0)$, принадлежащих классу K_0 относительно гильбертова пространства $M \cup H$ и в нем отношение K_0-гомотопности относительно семейства $\{S(M), E; A.x_0\}$. Полученное фактор-множество обозначим через $K_0(B(M), S(M), E; X, A, x_0)$.

Ïðåäëîæåíèå 4. *Существует биективное соответствие между элементами группы $\prod_q(X, A, x_0) = K_0[M, M \backslash B^*(M), J^e(M); X, A, x_0]$ и элементами гомотопического множества $K_0[B(M), S(M), E; X, A, x_0]$.*

Ñëåäñòâèå 4. *Предложение 4 позволяет множество $K_0[B(M), S(M), E; X, A, x_0]$ превратить в группу, изоморфную группе $\prod_q(X, A, x_0)$.*

Таким образом, мы можем писать $\prod_q(X, A, x_0) = K_0[B(M), S(M), E; X, A, x_0]$, т.е. элементы группы $\prod_q(X, A, x_0)$ определять как K_0-гомотопические классы относительно семейства $\{S(M), E; A, x_0\}$ K_0-отображений $f : (B(M), S(M), E) \to (X, A, x_0)$.

Рассмотрим теперь тройку $(B(M), S(M), s_0)$ и множество $K_0(B(M), S(M), s_0; X, A, x_0)$ всех отображений $f : (B(M), S(M), s_0) \to (X, A, x_0)$, принадлежащих классу K_0 в гильбертовом пространстве $M \cup H$. Введем в этом множестве отношение K_0-гомотопности относительно семейства $\{S(M), s_0; A, x_0\}$ и полученное фактор-множество обозначим через $K_0[B(M), S(M), s_0; X, A, x_0]$.

Ïðåäëîæåíèå 5. *Существует биективное соответствие между элементами гомотопических множеств $K_0[B(M), S(M), E; X, A, x_0]$ и $K_0[B(M), S(M), s_0; X, A, x_0]$.*

Ñëåäñòâèå 5. *В силу предложения 5 множество $K_0[B(M), S(M), s_0; X, A, x_0]$*

можно наделить структурой группы, изоморфной группе $\prod_q(X, A, x_0)$.

Таким образом, мы можем группу $\prod_q(X, A, x_0)$ отождествлять с группой $K_0[B(M), S(M), s_0; X, A, x_0]$ и, следовательно, элементы группы $\prod_q(X, A, x_0)$ можно определять как K_0-гомотопические классы относительно семейства $\{S(M), s_0; A, x_0\}$ отображений $f : (B(M), S(M), s_0) \to (X, A, x_0)$, принадлежащих классу K_0 относительно гильбертова пространства $M \cup H$.

Итак, в относительном случае наряду с основным определением существуют альтернативные (эквивалентные основному) определения K_0-бесконечномерных относительных гомотопических групп.

Ереванский государственный университет

Ý. À. Ìèðçàõàíÿí, Í. Ý. Ìèðçàõàíÿí

Àëüòåðíàòèâíûå îïðåäåëåíèÿ áåñêîíå÷íîìåðíûõ ãîìîòîïè÷åñêèõ ãðóïï ïîäìíîæåñòâ ãèëüáåðòîâà ïðîñòðàíñòâà

Статья посвящена бесконечномерной гомотопической топологии вещественного гильбертова пространства H. Приведены альтернативные определения бесконечномерных абсолютных и относительных гомотопических групп подмножеств и пар подмножеств из H. Допустимыми являются отображения, принадлежащие одному специальному классу K_0 непрерывных отображений (K_0-отображений) подмножеств из H.

Է. Ա. Միրզախանյան, Ն. Է. Միրզախանյան

Հիլբերտյան տարածության ենթաբազմությունների անվերջ չափականության հոմոտոպիական խմբերի ալտերնատիվ սահմանումներ

Հոդվածը նվիրված է իրական հիլբերտյան H տարածության անվերջ չափականության հոմոտոպիական տոպոլոգիայի կառուցմանը։ Այնտեղ բերված են H տարածության ենթաբազմությունների անվերջ չափականության հոմոտոպիական խմբերի ալտերնատիվ սահմանումներ։

Թույլատրելի արտապատկերումներ են H տարածության ենթաբազմությունների անընդհատ արտապատկերումների K_0 հատուկ դասին պատկանող անընդհատ արտապատկերումները։

E. A. Mirzakhanian, N. E. Mirzakhanian

Alternative Definitions of Infinite-Dimensional Homotopic Groups of Subsets of Hilbert Space

The paper presents alternative definitions of infinite-dimensional homotopic groups of subsets and pair of subsets of real Hilbert Space H. The admissible mappings are mappings, which belong to a special class K_0 of continuous mappings of subsets from H so-called K_0-mappings. Definitions of basic notions and some properties of class K_0 are containing in [1,2].

Ëèòåðàòóðà

1. *Мирзаханян Э.А.* - Уч. записки ЕГУ. 1990. N3. C. 21-28.

2. *Мирзаханян Э.А.* - Уч. записки ЕГУ. 1991. N1. C. 3-10.

3. *Мирзаханян Э.А.* - Изв. ВУЗов. Математика, 2002. N8 (483). C. 43-52.

4. *Мирзаханян Э.А.* - Изв. НАН Армении. Математика. 2002. Т. 37. N4. C. 31-44.