ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 107 2007 № 2

УДК 539.3

Г. Л. Азатян

Асимптотика вынужденных колебаний двухслойной ортотропной пластинки во второй краевой задаче теории упругости при наличии вязкого сопротивления

(Представлено академиком Л. А. Агаловяном 9/III 2007)

Ключевые слова: *вязкое сопротивление, вынужденные колебания, упругость, анизотропия, резонанс, амплитуда, асимптотический метод*

Асимптотическим методом решена трехмерная динамическая задача теории упругости о вынужденных колебаниях двухслойной ортотропной пластинки при наличии вязкого сопротивления. Установлены условия возникновения резонанса. Для частного типа задачи получено замкнутое решение. Показано, что наличие мягкого верхнего слоя приводит к уменьшению амплитуд колебаний в нижестоящем слое.

1. Рассматривается задача о вынужденных колебаниях двухслойной ортотропной пластинки $D = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_{0,} - h_2 \leq z \leq h_1, h_1 + h_2 = h << l\}$ при условиях полного контакта между слоями, когда нижняя грань нижней пластинки жестко закреплена, а на верхней приложен гармонически изменяющийся во времени вектор перемещения (рис.1).

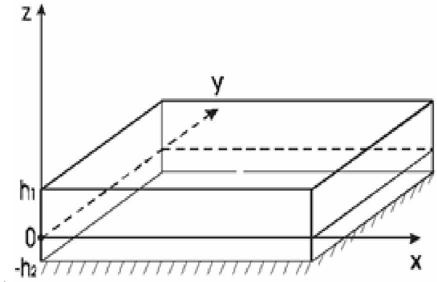

Рис.1.

Имеем следующие граничные условия:

$$u^{II} = v^{II} = w^{II} = 0 \;\text{ при } \quad z = -h_2,$$

$$u^I = u^+(\xi, \eta) \sin \Omega t \quad (u, v, w) \quad \text{при} \quad z = h_1, \tag{1.1}$$

$\xi = x/l$, $\eta = y/l$, D_0 - плоскость между слоями, l - характерный тангенциальный размер пластинки,
и условия полного контакта:

$$\sigma_{xz}^I(z=0) = \sigma_{xz}^{II}(z=0), \quad \sigma_{yz}^I(z=0) = \sigma_{yz}^{II}(z=0), \quad \sigma_{zz}^I(z=0) = \sigma_{zz}^{II}(z=0),$$

$$u^I(z=0) = u^{II}(z=0), \quad v^I(z=0) = v^{II}(z=0), \quad w^I(z=0) = w^{II}(z=0). \tag{1.2}$$

Запишем систему динамических уравнений пространственной задачи теории упругости анизотропного тела для ортотропных сред:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k)}}{\partial z} - k_1^{(k)} \frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} = \rho_k \frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial t^2} \quad (x, y, z; u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}), \quad k = I, II,$$

$$\frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} = a_{11}^{(k)} \sigma_{xx}^{(k)} + a_{12}^{(k)} \sigma_{yy}^{(k)} + a_{13}^{(k)} \sigma_{zz}^{(k)} \quad (u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}; x, y, z; 1, 2, 3), \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial u^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x} = a_{66}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)}, \quad \frac{\partial w^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(k)}}{\partial z} = a_{55}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)}, \quad \frac{\partial w^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial z} = a_{44}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)}.$$

2. Решение системы уравнений (1.3) при граничных условиях (1.1) и условиях контакта (1.2) будем искать в виде

$$Q^{(k)}(x, y, z, t) = Q_1^{(k)}(x, y, z) \sin \Omega t + Q_2^{(k)}(x, y, z) \cos \Omega t, \tag{2.1}$$

где $Q^{(k)}$ - любое из напряжений и перемещений, Ω - частота вынуждающего воздействия.

Подставив (2.1) в (1.3), затем перейдя к безразмерным координатам и безразмерным компонентам вектора перемещения:

$$\xi = x/l, \eta = y/l, \zeta = z/h; U_j^{(k)} = u_j^{(k)}/l, V_j^{(k)} = v_j^{(k)}/l,$$

$$W_j^{(k)} = w_j^{(k)}/l, k = I, II; j = 1, 2, \tag{2.2}$$

получим сингулярно возмущенную малым параметром $\varepsilon = h/l$ систему, решение которой будем искать в виде следующего асимптотического разложения [1]:

$$\sigma_{\alpha\beta j}^{(k)} = \varepsilon^{-1+s} \sigma_{\alpha\beta j}^{(k,s)}, \quad \alpha, \beta = x, y, z; \quad s = \overline{0, N};$$

$$(U_j^{(k)}, V_j^{(k)}, W_j^{(k)}) = \varepsilon^s (U_j^{(k,s)}, V_j^{(k,s)}, W_j^{(k,s)}), \quad k = I, II; \quad j = 1, 2; \quad s = \overline{0, N}. \tag{2.3}$$

$s = \overline{0, N}$ означает, что по немому (повторяющемуся) индексу s происходит суммирование от 0 до числа приближений N. Подставив (2.3) во вновь полученную систему уравнений, получим рекуррентную систему для определения $\sigma_{\alpha\beta j}^{(k)}$, $U_j^{(k)}, V_j^{(k)}, W_j^{(k)}$. В этой системе все $\sigma_{\alpha\beta j}^{(k,s)}$ можно выразить через $U_j^{(k,s)}, V_j^{(k,s)}, W_j^{(k,s)}$ [2].

Для определения функций $U_j^{(k,s)}, V_j^{(k,s)}, W_j^{(k,s)}$ получаются уравнения:

$$\frac{\partial^2 U_1^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^{(k)}(\rho_k(\Omega_*)^2 U_1^{(k,s)} + 2K^{(k)}\Omega_* U_2^{(k,s)}) = R_{U_1}^{(k,s)},$$

$$\frac{\partial^2 U_2^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^{(k)}(\rho_k(\Omega_*)^2 U_2^{(k,s)} - 2K^{(k)}\Omega_* U_1^{(k,s)}) = R_{U_2}^{(k,s)},$$

$$(U, V; a_{55}^{(k)}, a_{44}^{(k)})$$

$$A_{11}^{(k)} \frac{\partial^2 W_1^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} + \rho_k(\Omega_*)^2 W_1^{(k,s)} + 2K^{(k)}\Omega_* W_2^{(k,s)} = R_{W_1}^{(k,s)}, \tag{2.4}$$

$$A_{11}^{(k)} \frac{\partial^2 W_2^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} + \rho_k(\Omega_*)^2 W_2^{(k,s)} - 2K^{(k)}\Omega_* W_1^{(k,s)} = R_{W_2}^{(k,s)},$$

$$k = I, II,$$

где

$$R_{U_j}^{(k,s)} = -\frac{\partial^2 W_j^{(k,s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - a_{55}^{(k)}\Big[\frac{\partial^2 \sigma_{xxj}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \sigma_{xyj}^{(k,s-1)}}{\partial \eta}\Big],$$

$$R_{V_j}^{(k,s)} = -\frac{\partial^2 W_j^{(k,s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - a_{44}^{(k)}\Big[\frac{\partial^2 \sigma_{xyj}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \sigma_{yyj}^{(k,s-1)}}{\partial \eta}\Big],$$

$$R_{W_j}^{(k,s)} = A_{23}^{(k)} \frac{\partial^2 U_j^{(k,s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + A_{13}^{(k)} \frac{\partial^2 V_j^{(k,s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial^2 \sigma_{xzj}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 \sigma_{yzj}^{(k,s-1)}}{\partial \eta}. \tag{2.5}$$

Очевидно, что $R_{U_j}^{(k,0)} = R_{V_j}^{(k,0)} = R_{W_j}^{(k,0)} = 0$; $k = I, II$; $j = 1, 2$.
Из (2.4) следуют уравнения

$$U_2{}^{(k,s)} = -\frac{1}{2K^{(k)}\Omega_* a_{55}^{(k)}}\Big(\frac{\partial^2 U_1^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^{(k)}\rho_k(\Omega_*)^2 U_1^{(k,s)} - R_{U_1}^{(k,s)}\Big) \quad (U, V; a_{55}^{(k)}, a_{44}^{(k)}), \tag{2.6}$$

$$W_2{}^{(k,s)} = -\frac{1}{2K^{(k)}\Omega_*}\Big(A_{11}^{(k)} \frac{\partial^2 W_1^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} + \rho_k(\Omega_*)^2 W_1^{(k,s)} - R_{W_1}^{(k,s)}\Big), \quad k = I, II,$$

а также уравнения

$$\frac{\partial^4 U_1^{(k,s)}}{\partial \zeta^4} + 2a_{55}^{(k)}\rho_k(\Omega_*)^2 \frac{\partial^2 U_1^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} + (a_{55}^{(k)})^2(\rho_k^2(\Omega_*)^2 + 4(K^{(k)})^2)(\Omega_*)^2 U_1^{(k,s)} =$$

$$= \frac{\partial^2 R_{U_1}^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^{(k)}\rho_k(\Omega_*)^2 R_{U_1}^{(k,s)} - 2K a_{55}^{(k)}\Omega_* R_{U_2}^{(k,s)}, \quad (U, V; a_{55}^{(k)}, a_{44}^{(k)}),$$

$$\frac{\partial^4 W_1^{(k,s)}}{\partial \zeta^4} + 2\rho_k \frac{(\Omega_*)^2}{A_{11}^{(k)}} \frac{\partial^2 W_1^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{(A_{11}^{(k)})^2}(\rho_k^2(\Omega_*)^2 + 4(K^{(k)})^2)(\Omega_*)^2 W_1^{(k,s)} =$$

$$=\frac{1}{A_{11}^{(k)}}\frac{\partial^2 R_{W_1}^{(k,s)}}{\partial\zeta^2}+\frac{(\Omega_*)^2}{(A_{11}^{(k)})^2}R_{W_1}^{(k,s)}-\frac{2K\Omega_*}{(A_{11}^{(k)})^2}R_{W_2}^{(k,s)},\quad k=I,II. \tag{2.7}$$

Решениями уравнений (2.7) являются:

$$U_1^{(k,s)}=U_{1o}^{(k,s)}(\xi,\eta,\zeta)+U_{1ч}^{(k,s)}(\xi,\eta,\zeta)\quad (U,V,W),\quad k=I,II, \tag{2.8}$$

где величины с индексом "о"- решения однородных, а с индексом "ч" - частные решения неоднородных уравнений (2.7).

Решениями однородных уравнений являются:

$$U_{1o}^{(k,s)}(\xi,\eta,\zeta)=C_{U_1}^{(k,s)}(\xi,\eta)\varphi_{1U}^{(k)}+C_{U_2}^{(k,s)}(\xi,\eta)\varphi_{2U}^{(k)}+$$

$$+C_{U_3}^{(k,s)}(\xi,\eta)\varphi_{3U}^{(k)}+C_{U_4}^{(k,s)}(\xi,\eta)\varphi_{4U}^{(k)}\qquad (U,V,W), \tag{2.9}$$

где

$$\varphi_{1U}^{(k)}=ch\gamma_U^{(k)}\zeta\cos\delta_U^{(k)}\zeta,\ \varphi_{2U}^{(k)}=sh\gamma_U^{(k)}\zeta\sin\delta_U^{(k)}\zeta$$

$$\varphi_{3U}^{(k)}=ch\gamma_U^{(k)}\zeta\sin\delta_U^{(k)}\zeta,\ \varphi_{4U}^{(k)}=sh\gamma_U^{(k)}\zeta\cos\delta_U^{(k)}\zeta,$$

$$\gamma_U^{(k)}=\sqrt{\frac{a_{55}^{(k)}\Omega_*}{2}\left(\sqrt{\rho_k^2(\Omega_*)^2+4(K^{(k)})^2}-\rho_k\Omega_*\right)},$$

$$\delta_U^{(k)}=\sqrt{\frac{a_{55}^{(k)}\Omega_*}{2}\left(\sqrt{\rho_k^2(\Omega_*)^2+4(K^{(k)})^2}+\rho_k\Omega_*\right)}, \tag{2.10}$$

$$(U,V,W;a_{55}^{(k)},a_{44}^{(k)},1/A_{11}^{(k)}),\quad k=I,II.$$

Одновременно имеем:

$$U_2^{(k,s)}=U_{2o}^{(k,s)}(\xi,\eta,\zeta)+U_{2ч}^{(k,s)}(\xi,\eta,\zeta)\quad (U,V,W),\quad k=I,II, \tag{2.11}$$

$$U_{2o}^{(k,s)}(\xi,\eta,\zeta)=-C_{U_1}^{(k,s)}(\xi,\eta)\varphi_{2U}^{(k)}+C_{U_2}^{(k,s)}(\xi,\eta)\varphi_{1U}^{(k)}+$$

$$+C_{U_3}^{(k,s)}(\xi,\eta)\varphi_{4U}^{(k)}-C_{U_4}^{(k,s)}(\xi,\eta)\varphi_{3U}^{(k)}, \tag{2.12}$$

$$\sigma_{xz1}^{(k,s)}=\frac{1}{a_{55}^{(k)}}[C_{U_1}^{(k,s)}(\gamma_U^{(k)}\varphi_{4U}^{(k)}-\delta_U^{(k)}\varphi_{3U}^{(k)})+C_{U_2}^{(k,s)}(\gamma_U^{(k)}\varphi_{3U}^{(k)}+\delta_U^{(k)}\varphi_{4U}^{(k)})+$$

$$+C_{U_3}^{(k,s)}(\gamma_U^{(k)}\varphi_{2U}^{(k)}+\delta_U^{(k)}\varphi_{1U}^{(k)})+C_{U_4}^{(k,s)}(\gamma_U^{(k)}\varphi_{1U}^{(k)}-\delta_U^{(k)}\varphi_{2U}^{(k)})]+\sigma_{xz1ч}^{(k,s)}(\xi,\eta,\zeta), \tag{2.13}$$

$$\sigma_{xz2}^{(k,s)}=\frac{1}{a_{55}^{(k)}}[-C_{U_1}^{(k,s)}(\gamma_U^{(k)}\varphi_{3U}^{(k)}+\delta_U^{(k)}\varphi_{4U}^{(k)})+C_{U_2}^{(k,s)}(\gamma_U^{(k)}\varphi_{4U}^{(k)}-\delta_U^{(k)}\varphi_{3U}^{(k)})+$$

$$+C_{U_3}^{(k,s)}(\gamma_U^{(k)}\varphi_{1U}^{(k)}-\delta_U^{(k)}\varphi_{2U}^{(k)})-C_{U_4}^{(k,s)}(\gamma_U^{(k)}\varphi_{2U}^{(k)}+\delta_U^{(k)}\varphi_{1U}^{(k)})]+\sigma_{xz2ч}^{(k,s)}(\xi,\eta,\zeta),$$

$$(x,y,z;U,V,W;a_{55}^{(k)},a_{44}^{(k)},1/A_{11}^{(k)}),\quad k=I,II,$$

где

$$U_{2ч}^{(k,s)}(\xi,\eta,\zeta)=-\frac{1}{2K^{(k)}\Omega_* a_{55}^{(k)}}\left(\frac{\partial U_{1ч}^{(k,s)}}{\partial\zeta^2}+a_{55}^{(k)}(\Omega_*)^2U_1^{(k,s)}-R_{U1}^{(k,s)}\right),$$

$$\sigma_{xz1ч}^{(k,s)} = \frac{1}{a_{55}^{(k)}}\left[\frac{\partial U_{1ч}^{(k,s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial W_{1ч}^{(k,s-1)}}{\partial\xi}\right]. \tag{2.14}$$

Удовлетворив граничным условиям (1.1) и (1.2), получим три алгебраические системы относительно неизвестных функций $C_{ui}^{(ks)}$, $C_{vi}^{(ks)}$, $C_{wi}^{(ks)}$, $i = 1, 2, 3, 4$:

$$C_{U1}^{(I,s)}\varphi_{1U}^{(I)}(\zeta=\zeta_1) + C_{U2}^{(I,s)}\varphi_{2U}^{(I)}(\zeta=\zeta_1) + C_{U3}^{(I,s)}\varphi_{3U}^{(I)}(\zeta=\zeta_1) + C_{U4}^{(I,s)}\varphi_{4U}^{(I)}(\zeta=\zeta_1) =$$

$$= U^{+(s)} - U_{1ч}^{(I,s)}(\zeta=\zeta_1),$$

$$-C_{U1}^{(I,s)}\varphi_{2U}^{(I)}(\zeta=\zeta_1) + C_{U2}^{(I,s)}\varphi_{1U}^{(I)}(\zeta=\zeta_1) + C_{U3}^{(I,s)}\varphi_{4U}^{(I)}(\zeta=\zeta_1) - C_{U4}^{(I,s)}\varphi_{3U}^{(I)}(\zeta=\zeta_1) =$$

$$= -U_{2ч}^{(I,s)}(\zeta=\zeta_1),$$

$$C_{U1}^{(II,s)}\varphi_{1U}^{(II)}(\zeta=-\zeta_2) + C_{U2}^{(II,s)}\varphi_{2U}^{(II)}(\zeta=-\zeta_2) + C_{U3}^{(II,s)}\varphi_{3U}^{(II)}(\zeta=-\zeta_2) +$$

$$+ C_{U4}^{(II,s)}\varphi_{4U}^{(II)}(\zeta=-\zeta_2) = -U_{1ч}^{(II,s)}(\zeta=-\zeta_2),$$

$$-C_{U1}^{(II,s)}\varphi_{2U}^{(II)}(\zeta=-\zeta_2) + C_{U2}^{(II,s)}\varphi_{1U}^{(II)}(\zeta=-\zeta_2) + C_{U3}^{(II,s)}\varphi_{4U}^{(II)}(\zeta=-\zeta_2) -$$

$$- C_{U4}^{(II,s)}\varphi_{3U}^{(II)}(\zeta=-\zeta_2) = -U_{2ч}^{(II,s)}(\zeta=-\zeta_2),$$

$$C_{U1}^{(I,s)}\varphi_{1U}^{(I)}(\zeta=0) + C_{U2}^{(I,s)}\varphi_{2U}^{(I)}(\zeta=0) + C_{U3}^{(I,s)}\varphi_{3U}^{(I)}(\zeta=0) + C_{U4}^{(I,s)}\varphi_{4U}^{(I)}(\zeta=0) + U_{1ч}^{(I,s)}(\zeta=0) =$$

$$= C_{U1}^{(II,s)}\varphi_{1U}^{(II)}(\zeta=0) + C_{U2}^{(II,s)}\varphi_{2U}^{(II)}(\zeta=0) + C_{U3}^{(II,s)}\varphi_{3U}^{(II)}(\zeta=0) +$$

$$+ C_{U4}^{(II,s)}\varphi_{4U}^{(II)}(\zeta=0) + U_{1ч}^{(II,s)}(\zeta=0),$$

$$-C_{U1}^{(I,s)}\varphi_{2U}^{(I)}(\zeta=0) + C_{U2}^{(I,s)}\varphi_{1U}^{(I)}(\zeta=0) + C_{U3}^{(I,s)}\varphi_{4U}^{(I)}(\zeta=0) - C_{U4}^{(I,s)}\varphi_{3U}^{(I)}(\zeta=0) + U_{2ч}^{(I,s)}(\zeta=0) =$$

$$= -C_{U1}^{(II,s)}\varphi_{2U}^{(II)}(\zeta=0) + C_{U2}^{(II,s)}\varphi_{1U}^{(II)}(\zeta=0) + C_{U3}^{(II,s)}\varphi_{4U}^{(II)}(\zeta=0) -$$

$$- C_{U4}^{(II,s)}\varphi_{3U}^{(II)}(\zeta=0) + U_{2ч}^{(II,s)}(\zeta=0), \tag{2.15}$$

$$\frac{1}{a_{55}^{(I)}}\Big[C_{U1}^{(I,s)}(\gamma_U^{(I)}\varphi_{4U}^{(I)}(\zeta=0) - \delta_U^{(I)}\varphi_{3U}^{(I)}(\zeta=0)) + C_{U2}^{(I,s)}(\gamma_U^{(I)}\varphi_{3U}^{(I)}(\zeta=0) + \delta_U^{(I)}\varphi_{4U}^{(I)}(\zeta=0)) +$$

$$+ C_{U3}^{(I,s)}(\gamma_U^{(I)}\varphi_{2U}^{(I)}(\zeta=0) + \delta_U^{(I)}\varphi_{1U}^{(I)}(\zeta=0)) + C_{U4}^{(I,s)}(\gamma_U^{(I)}\varphi_{1U}^{(I)}(\zeta=0) - \delta_U^{(I)}\varphi_{2U}^{(I)}(\zeta=0))\Big] +$$

$$+ \sigma_{xz1ч}^{(I,s)}(\zeta=0) = \frac{1}{a_{55}^{(II)}}\Big[C_{U1}^{(II,s)}(\gamma_U^{(II)}\varphi_{4U}^{(II)}(\zeta=0) - \delta_U^{(II)}\varphi_{3U}^{(II)}(\zeta=0)) +$$

$$+ C_{U2}^{(II,s)}(\gamma_U^{(II)}\varphi_{3U}^{(II)}(\zeta=0) + \delta_U^{(II)}\varphi_{4U}^{(II)}(\zeta=0)) +$$

$$+ C_{U3}^{(II,s)}(\gamma_U^{(II)}\varphi_{2U}^{(II)}(\zeta=0) + \delta_U^{(II)}\varphi_{1U}^{(II)}(\zeta=0)) +$$

$$+ C_{U4}^{(II,s)}(\gamma_U^{(II)}\varphi_{1U}^{(II)}(\zeta=0) - \delta_U^{(II)}\varphi_{2U}^{(II)}(\zeta=0))\Big] + \sigma_{xz1ч}^{(II,s)}(\zeta=0),$$

$$\frac{1}{a_{55}^{(I)}}\Big[-C_{U1}^{(I,s)}(\gamma_U^{(I)}\varphi_{3U}^{(I)}(\zeta=0) + \delta_U^{(I)}\varphi_{4U}^{(I)}(\zeta=0)) + C_{U2}^{(I,s)}(\gamma_U^{(I)}\varphi_{4U}^{(I)}(\zeta=0) - \delta_U^{(I)}\varphi_{3U}^{(I)}(\zeta=0)) +$$

$$+ C_{U3}^{(I,s)}(\gamma_U^{(I)}\varphi_{1U}^{(I)}(\zeta=0) - \delta_U^{(I)}\varphi_{2U}^{(I)}(\zeta=0)) - C_{U4}^{(I,s)}(\gamma_U^{(I)}\varphi_{2U}^{(I)}(\zeta=0) + \delta_U^{(I)}\varphi_{1U}^{(I)}(\zeta=0))\Big] +$$

$$+\sigma_{xz2ч}^{(I,s)}(\zeta=0)=\frac{1}{a_{55}^{(II)}}\Big[-C_{U1}^{(II,s)}(\gamma_U^{(II)}\varphi_{3U}^{(II)}(\zeta=0)+\delta_U^{(II)}\varphi_{4U}^{(II)}(\zeta=0))+$$
$$+C_{U2}^{(II,s)}(\gamma_U^{(II)}\varphi_{4U}^{(II)}(\zeta=0)-\delta_U^{(II)}\varphi_{3U}^{(II)}(\zeta=0))+$$
$$+C_{U3}^{(II,s)}(\gamma_U^{(II)}\varphi_{1U}^{(II)}(\zeta=0)-\delta_U^{(II)}\varphi_{2U}^{(II)}(\zeta=0))-$$
$$-C_{U4}^{(II,s)}(\gamma_U^{(II)}\varphi_{2U}^{(II)}(\zeta=0)+\delta_U^{(II)}\varphi_{1U}^{(II)}(\zeta=0))\Big]+\sigma_{xz2ч}^{(II,s)}(\zeta=0),\quad (U,V,W;a_{55}^{(k)},a_{44}^{(k)},1/A_{11}^{(k)})$$

где

$$U^{+(0)}=u^+/l,\quad V^{+(0)}=v^+/l,\quad W^{+(0)}=w^+/l,\quad U^{+(0)}=0,s\neq 0,(U,V,W). \tag{2.16}$$

Решив систему (2.15) и подставив значения $C_{Ui}^{(ks)}(\xi,\eta)$, $C_{Vi}^{(ks)}(\xi,\eta)$, $C_{Wi}^{(ks)}(\xi,\eta)$ в (2.8) ,(2.11), получим:

$$U_1^{(k,s)}=\frac{f_{U_1}^{(k,s)}}{\Delta_U}\varphi_{1U}^{(k)}+\frac{f_{U_2}^{(k,s)}}{\Delta_U}\varphi_{2U}^{(k)}+\frac{f_{U_3}^{(k,s)}}{\Delta_U}\varphi_{3U}^{(k)}+\frac{f_{U_4}^{(k,s)}}{\Delta_U}\varphi_{4U}^{(k)}+U_{1ч}^{(k,s)},$$

$$U_2^{(k,s)}=\frac{f_{U_2}^{(k,s)}}{\Delta_U}\varphi_{1U}^{(k)}-\frac{f_{U_1}^{(k,s)}}{\Delta_U}\varphi_{2U}^{(k)}-\frac{f_{U_4}^{(k,s)}}{\Delta_U}\varphi_{3U}^{(k)}+\frac{f_{U_3}^{(k,s)}}{\Delta_U}\varphi_{4U}^{(k)}+U_{2ч}^{(k,s)},(U,V,W),\quad k=I,II,$$

где $f_{U_i}^{(k,s)}(\xi,\eta)$, $i=1,2,3,4$, получаются из определителя Δ_U системы (2.15) заменой соответственных столбцов столбцом из свободных членов.

Считаем , что Δ_U, Δ_V, $\Delta_W\neq 0$. Если Ω такова, что хотя бы одна из этих величин равна нулю, произойдёт резонанс. Эти значения Ω совпадают со значениями частот собственных колебаний [3].

3. Рассмотрим частный случай. Пусть

$$u^+=\text{const},\quad v^+=\text{const},\quad w^+=\text{const}. \tag{3.1}$$

При $s=0$ будем иметь:

$$U_1^{(k,0)}=\frac{f_{U_1}^{(k,0)}}{\Delta_U}\varphi_{1U}^{(k)}+\frac{f_{U_2}^{(k,0)}}{\Delta_U}\varphi_{2U}^{(k)}+\frac{f_{U_3}^{(k,0)}}{\Delta_U}\varphi_{3U}^{(k)}+\frac{f_{U_4}^{(k,0)}}{\Delta_U}\varphi_{4U}^{(k)},$$

$$U_2^{(k,0)}=\frac{f_{U_2}^{(k,0)}}{\Delta_U}\varphi_{1U}^{(k)}-\frac{f_{U_1}^{(k,0)}}{\Delta_U}\varphi_{2U}^{(k)}-\frac{f_{U_4}^{(k,0)}}{\Delta_U}\varphi_{3U}^{(k)}+\frac{f_{U_3}^{(k,0)}}{\Delta_U}\varphi_{4U}^{(k)}. \tag{3.2}$$

Несложно убедиться, что при $s>0$

$$U_1^{(k,s)}=V_1^{(k,s)}=W_1^{(k,s)}=U_2^{(k,s)}=V_2^{(k,s)}=W_2^{(k,s)}=0, \tag{3.3}$$

поэтому приближению $s=0$ соответствует точное решение.

$$u^{(k)}=l(U_1^{(k,0)}\sin\Omega t+U_2^{(k,0)}\cos\Omega t),\quad (u^{(k)},v^{(k)},w^{(k)};U,V,W),k=I,II. \tag{3.4}$$

В качестве иллюстрации приведем некоторые численные и графические результаты. Рассмотрим пластинку, состоящую из резины ($E=6.96\times 10^5$

Па, $G = 2.4 \times 10^5$ Па, $\rho = 1100$ кг/м^3) , стеклопластика АСТТ и СВАМ, характеристики упругости которых приведены в [1], или бетона ($E = 3.0262 \times 10^{10}$ Па, $G = 1.0435 \times 10^{10}$ Па, $\rho = 2300$ кг/м^3), с толщиной $h = 1$м. Графики амплитуд колебаний по толщине пластинки соответственно приведены на рис. 2-4, когда $t = 1$с.

АСТТ – Бетон

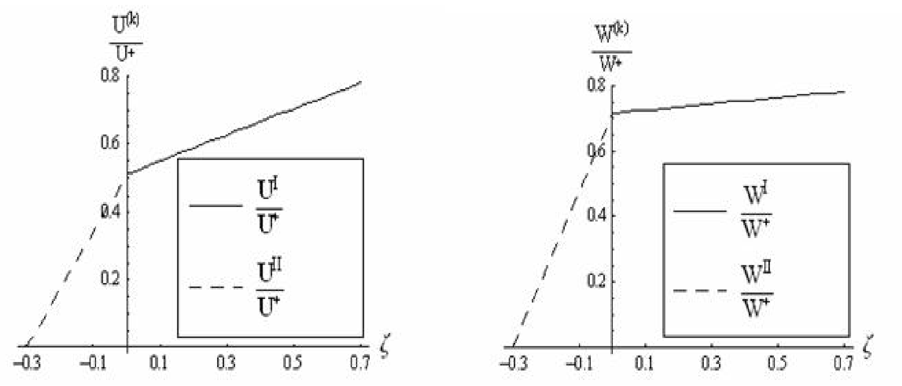

Рис.2.

АСТТ - СВАМ

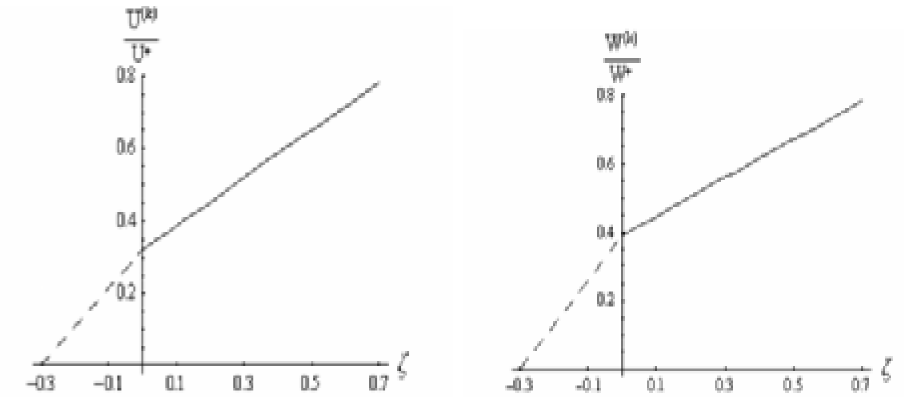

Рис.3.

СВАМ – Резина

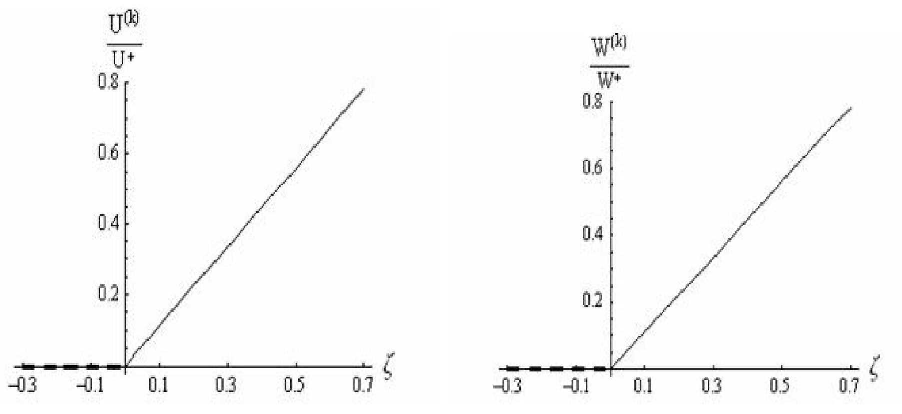

Рис.4.

Из приведённых графиков видно, что если все слои состоят из жестких схожих материалов, то амплитуды колебаний уменьшаются, хоть и незначительно, от верхнего слоя к нижнему (рис.2,3). При наличии же слоя из более мягкого материала (например, резины), амплитуды колебаний в нижнем слое резко уменьшаются (рис.4). Этот результат сохраняет силу и при иных толщинах мягкого слоя. Установленный результат можно использовать в машиностроении и сейсмостойком строительстве.

Институт механики НАН РА

Գ. Լ. Ազատյան

Երկշերտ օրթոտրոպ սալի հարկադրական տատանումների ասիմպտոտիկան առաձգականության տեսության երկրորդ եզրային խնդրում՝ մածուցիկ դիմադրության առկայության դեպքում

Ասիմպտոտիկ մեթոդով լուծված է երկշերտ օրթոտրոպ սալի հարկադրական տատանումների վերաբերյալ առաձգականության տեսության եռաչափ դինամիկական խնդիրը, երբ սալում առկա է մածուցիկ դիմադրություն: Դիմային նիստերից մեկը կոշտ ամրակցված է, իսկ մյուս նիստի վրա ազդում է ժամանակի ընթացքում ներդաշնակորեն փոփոխվող տեղափոխման վեկտորը: Շերտերի միջև տեղի ունեն լրիվ կոնտակտի պայմանները: Հաստատված է լարումների թենզորի և տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչների ասիմպտոտիկան, կառուցված է իտերացիոն պրոցես անհայտ մեծությունները որոշելու համար: Որոշված են տատանման լայնույթները, մասնավոր դասի խնդիրների համար ստացված են փակ լուծումներ: Նշված են ռեզոնանսի առաջացման պայմանները:

G. L. Azatyan

Asymptotic Form of Forced Vibrations of Double-Layer Orthotropic Plate in Case of the Second Boundary Problem of the Theory of Elasticity at Presence of Viscous resistance

The asymptotic method was used to solve the three-dimensional dynamic problem of the elasticity theory on forced vibration of double-layer orthotropic plate at presence of viscous resistance. The front face of the lower layer is rigidly fastened, and on the front face of the upper level the displacement vector is given, varieties of which are harmonically according to time. There are conditions of full contact between the layers. The asymptotic form of the components of stress tensor and displacement vector is found. An iterative process for determination of sought unknown quantities is developed. Formulas are developed to determine the amplitude of vibrations. The closed solution for particular type of problems is found. The resonance arising conditions are determined.

Литература

1. *Агаловян Л. А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. Наука. 1997. 415с.

2. *Агаловян Л. А .* В сб.: Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван. Изд-во "Гитутюн" НАН РА. 2002. С. 9-19.

3. *Агаловян Л. А., Азатян Г. Л.* В сб.: Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести. Ереван. Изд-во "Гитутюн" НАН РА. 2006. С. 30-41.