ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 107 2007 № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 517.518, 517.927

Академик А. Б. Нерсесян

Ускорение сходимости разложений по собственным функциям

(Представлено 2/III 2007)

Ключевые слова: *функция Грина, разложения по собственным функциям, ускорение сходимости, рациональная аппроксимация, аппроксимация Паде, асимптотические оценки*

1. Введение. Разложения по собственным функциям граничных задач для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) играют важную роль при решении как теоретических, так и прикладных задач. Равномерная сходимость таких рядов обычно бывает связана с разложениями функций из области определения соответствующего оператора. Однако, с точки зрения приложений, даже равномерная сходимость сама по себе может быть мало эффективной: решающую роль играет скорость сходимости. В случае системы Фурье $\{e^{i\pi nx}\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2...$, $-1 \leq x \leq 1$, являющейся системой собственных функций задачи $i\,y'(x) = \lambda,\ y(x),\ y(-1) = y(1)$, А. Крыловым ([1], 1906 г.) была предложена идея ускорения сходимости разложения для кусочно-гладкой функции применением соответствующей кусочно-полиномиальной корректировки. Теоретическое обоснование подобного метода было развито после 1960-х гг. в работах К. Ланцоша и других авторов [2-7]. Эффективные же алгоритмы ускорения сходимости, не использующие заранее заданной информации о величинах скачков разлагаемой функции в заданных сингулярных точках, были разработаны после 1990 г., главным образом в работах К. Экгофа, Д. Готлиба и их соавторов (см. [8-12]). Ниже этот подход будем называть КЭГ-методом. В работе [13] он был распространен на случай разложения гладкой на конечном отрезке функции по собственным функциям самосопряженных задач для ОДУ.

С другой стороны, в работе [14] был разработан иной метод ускорения сходимости упомянутых рядов Фурье, основанный на применении аппроксимации Паде к асимптотическому ряду его коэффициентов, а в работе [15] была получена асимптотическая оценка ошибки метода в терминах скачков разлагаемой функции. Это привело к еще более точным и устойчивым алгоритмам, позволяющим, к тому же, эффективно выявлять "скрытые" (не кратные π) частоты главных периодических компонент этой функции. В работе [16] этот подход был распространен на случай разложений по классической системе Фурье - Бесселя $\{J_\nu(j_n\,x)\}$, $\nu \geq -1/2$, $x \in [0,1]$, $n = 1, 2, ...$, где $\{j_n\}$ - положительные корни уравнения $J_\nu(j) = 0$, а в работе [17] - на случай регулярных граничных задач для ОДУ с гладкими коэффициентами.

Ниже приводится теоретическое обоснование метода, обобщающего и усиливающего эти результаты автора.

2. Предварительные сведения. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$L\,y = \lambda\,y,\; L\,y = \sum_{s=0}^{m} p_s(x) y^{(s)}(x),\; m \geq 1 \tag{1}$$

с нормированными граничными условиями

$$U_\mu\,y = \sum_{s=0}^{m-1} \left(\alpha_s{}^\mu\, y^{(s)}(a) + \beta_s{}^\mu\, y^{(s)}(b)\right) = 0,\; \mu = 1, 2, ..., m, \tag{2}$$

где (a, b)- конечный интервал, $p_m(x) \equiv 1$, $p_s(x) \in C^{s+m(q-1)}[a, b]$ - комплекснозначные функции и $\{\alpha_s^\mu\}$, $\{\beta_s^\mu\}$ - комплексные постоянные ($q \geq 1$, $s = 0, 1, ..., (m - 1)$, $\mu = 1, 2, ..., m$).

Приведем известные сведения, используемые в дальнейшем (см., например, [18]).

Сопряженная задача имеет вид

$$L^*\,z = \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \left(z(x)\,\overline{p_s(x)}\;\right)^{(s)} = \bar\lambda\,z, \tag{1*}$$

$$U_\mu^*\,z = \sum_{s=0}^{m-1} \left(\alpha_s{}^{*\mu}\, z^{(s)}(a) + \beta_s{}^{*\mu}\, z^{(s)}(b)\right) = 0,\; \mu = 1, 2, ..., m, \tag{2*}$$

где $\{\alpha_s^{*\mu}\}$, $\{\beta_s^{*\mu}\}$ - соответствующим образом подобранные коэффициенты.

Нас интересует задача (1) с регулярными условиями (2). Обозначим через $\{\lambda_n\}$ бесконечное множество собственных значений задачи (1)-(2), пронумерованных в порядке возрастания их модуля. При четном m удобно считать $1 \leq n \leq \infty$, а при нечетном - $-\infty \leq n \leq \infty$. Упрощенная асимптотика для $\{\lambda_n\}$ имеет вид

$$\lambda_n = h\,n^m(1 + O(1/|n|)),\; |n| \to \infty, \tag{3}$$

где h может принимать два отличных от нуля значения.

Соответствующая нормированная система собственных функций

$$\{\phi_n(x),\ \psi_n(x)\},\ L\,\phi_n = \lambda_n\,\phi_n,\ L^*\psi_n = \bar{\lambda}_n\,\psi_n \tag{4}$$

биортогональна и полна в пространстве $L_2[a,b]$.

Упрощенная асимптотика собственных функций имеет следующий вид (здесь $\varphi_n = \phi_n$ или $\varphi_n = \psi_n$):

$$\frac{d^k}{dx^k}\,\varphi_n(x) = |n|^k\,\xi_{nk}(x),\ |n| \to \infty,\ |\xi_{nk}(x)| \le const,\ k = 0, 1, ..., m-1. \tag{5}$$

Оператор $L\,y - \lambda\,y,\ \lambda \notin \{\lambda_n\}$, с условиями (2) обращается с помощью мероморфной по λ функции Грина $G(x,t,\lambda)$. Будем предполагать, что ее полюсы в λ-плоскости (совпадающие с собственными значениями $\{\lambda_n\}$) простые. Не умаляя общности, можно считать, что нуль не является собственным значением. Ключевую роль в дальнейшем играет формула

$$G(x,t,\lambda) = \sum_{\forall\,n} \frac{\phi_n(x)\,\overline{\psi_n(t)}}{\lambda_n - \lambda},\ \lambda \in \mathrm{C},\ \lambda \notin \{\lambda_n\} \tag{6}$$

Как это следует из формул (3) и (5), ряд (6) может быть продифференцирован по x и t до суммарного порядка $m-1$, а дифференцирование по λ даже увеличивает скорость его сходимости. Значения функции Грина в сингулярной точке $\lambda = \lambda_n$ доопределим, отбросив в формуле (6) соответствующий член.

С другой стороны, функция Грина $G(\xi,x,\lambda)$ может быть представлена в явной форме через фундаментальную систему решений однородного уравнения $Ly - \lambda y = 0$ (см. [18], гл.1, §3).

3. Постановка задачи и схема ее решения. Пусть $f = f(x)$ - кусочно-гладкая на отрезке $[-1,1]$ функция, с точками "склеивания" $\{x_k\}$ $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_l = b,\ 2 \le l < \infty$, и $f \in C^{q\,m},\ q \ge 1$, на каждом из отрезков $[x_k, x_{k+1}],\ k = 1, 2, \cdots, l-1$.

В указанных выше условиях формальный ряд

$$f(x) \simeq \sum_{\forall\,n} f_n\,\phi_n(x),\ f_n = \int_a^b f(t)\,\overline{\psi_n(t)}\,dt \tag{7}$$

сходится к $f(x)$ поточечно при $x \in (a,b),\ x \notin \{x_k\}$, однако, вообще говоря, в L_2-метрике он сходится медленно. Как и в случае классического ряда Фурье, в окрестностях точек $\{x_k\}$ наблюдается явление Гиббса.

Задачу ускорения сходимости ряда (7) поставим следующим образом: пусть заданы коэффициенты $\{f_n\}$, $|n| \le N, N < \infty$ и точки сингулярностей $\{x_k\}$ функции $f(x)$. Требуется построить метод восстановления функции $f(x)$, при достаточно большом N, с ощутимо большей (чем при прямом суммировании

(7) для $|n| \leq N$) точностью (в равномерной или L_2-метрике).

Эта задача была решена в работе [17] в терминах функции Грина на основе применения аппроксимации Паде к следующему асимптотическому по степеням $1/\lambda_n$ ряду коэффициента f_n (L^0 - тождественный оператор, $n \to \infty$):

$$f_n = \sum_{k=1}^{l} \sum_{r=0}^{m-1} \overline{\psi_n^{(r)}(x_k)} \sum_{s=0}^{q} \lambda_n^{-s} A_{skr} + o(\lambda_n^{-q}), \ A_{skr} = \Delta_k(\ell_r L^s f(x)), \tag{8}$$

где $\{\ell_r\}$ - определенные дифференциальные операторы соответственно порядков $\{m-r-1\}$ и

$$\Delta_k(g(x)) = \begin{cases} g(x_k) & \text{при } k = 1; \\ g(x_k - 0) - g(x_k + 0) & \text{при } k \neq 1, l. \end{cases} \tag{8'}$$

Величины $\{A_{skr}\}$ естественно называть скачками функции $f(x)$. В работе [17] они приближенно находились из линейной системы, получаемой из (8) отбрасыванием члена $o(\lambda_n^{-q})$ и подбором различных значений $\{n_s\}$ так, чтобы было $\delta N \leq |n_1| \leq |n_2| < ... \leq |n_t| \leq N, 0 < \delta < 1, \, t = m\,q\,l$.

Следующая простая схема позволяет освободиться от последнего шага, избежав на практике, тем самым, соответствующей потери точности.

Взамен приближенного определения скачков и последующего применения аппроксимации Паде зададимся целью как можно точнее аппроксимировать коэффициенты $\{f_n\}$ при $|n| = O(N) \leq N$, $N \to \infty$, рациональной по λ_n функцией. Вид формулы, полученной в [17] из (8) применением аппроксимации Паде, позволяет прийти к выводу, что при $n \to \infty$ и любом r $(0 \leq r \leq q)$ справедливо представление

$$f_n = \sum_{s=1}^{l} \sum_{p=0}^{m-1} \overline{\psi}_n^{(p)}(x_s) \frac{\sum_{k=0}^{q-1} a_{k\,p\,s} \lambda_n^k}{\lambda_n^{q-r} \sum_{k=0}^{r} b_k \lambda_n^k} + (n^{-mq}), \ b_0 = 1, \, n \to \infty, \tag{9}$$

где $\{a_{k\,p\,s}\}$ и $\{b_k\}$ -некоторые постоянные.

Решим задачу их непосредственного определения с точки зрения минимизации среднеквадратичной погрешности рациональной аппроксимации $\{f_n\}$, сведя ее, в соответствии с (9), к решению методом псевдообращения следующей линейной системы с прямоугольной матрицей

$$f_n \, \lambda_n^{q-r} \sum_{k=0}^{r} b_k \lambda_n^k = \sum_{s=1}^{l} \sum_{p=0}^{m-1} \overline{\psi}_n^{(p)}(x_s) \sum_{k=0}^{q-1} a_{k\,p\,s} \lambda_n^k, \quad b_0 = 1 \tag{10}$$

при $n = n_1, n_2, ..., n_j$, $j \geq q\,l\,m + r$, относительно $q\,l\,m + r$ постоянных $\{a_{k\,p\,s}\}$ и $\{b_k\}$. Разумеется, если $j = q\,l\,m + r$ и матрица системы не сингулярна, то можно применить, скажем, метод Гаусса. Далее, имеем

$$\sum_{k=0}^{r} b_k \lambda_n^k = \prod_{j=1}^{\mu} (\lambda_n - \omega_j)^{\nu_j}, \ \sum_{j=1}^{\mu} \nu_j = r, \tag{11}$$

где $\{\omega_j\}$ - корни стоящего слева полинома соответствующей кратности $\{\nu_j\}$.

Наконец, для простоты предполагая, что $0 \notin \{\omega_j\}$ и разложив при каждом значении (p, s) рациональную относительно λ_n, функцию в правой части формулы (8) на простые дроби, придем к формуле

$$f_n = \sum_{s=1}^{l} \sum_{p=0}^{m-1} \overline{\psi}_n^{(p)}(x_s) \sum_{j=0}^{\mu} \sum_{i=1}^{\nu_j} \frac{c_{i\,j\,p\,s}}{(\lambda_n - \omega_j)^i} + O(n^{-q-1}), \qquad (12)$$

где $\omega_0 = 0$, $\nu_0 = q - r$ и $\{c_{i\,j\,p\,s}\}$ - соответствующие постоянные.

Как и в [17], сравнивая эту формулу с представлением функции Грина (6), приходим к следующей окончательной формуле ускорения сходимости:

$$f(x) \simeq \sum_{s=1}^{l} \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{i=1}^{\nu_j} c_{i\,j\,p\,s} G_{p\,i}(x, x_s, \omega_j) + \sum_{|n| \le N} g_n \phi_n(x), \qquad (13)$$

где

$$G_{p\,i}(x, t, \lambda) = \frac{\partial^{p+i-1}}{\partial t^p \, \partial \lambda^{i-1}} G(x, t, \lambda),$$

$$g_n = \sum_{|n| \le N} \left(f_n - \sum_{s=1}^{l} \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{\mu} \sum_{i=1}^{\nu_j} \frac{c_{i\,j\,p\,s} \overline{\psi}_n^{(p)}(x_s)}{(\lambda_n - \omega_j)^i} \right). \qquad (13')$$

Из (12) следует, что последний ряд в (13) сходится тем быстрее, чем больше q. Отметим, что если в (9) $r = 0$, то тем самым непосредственно обобщается КЭГ-метод (см. введение), а в формуле (13) надо убрать суммирование по j и подставить $\omega_j = 0$. При этом предлагаемый метод будет теоретически точным для функций, имеющих вид первого слагаемого справа в (13). Случай же $r = q$ предпочтителен, поскольку при этом метод точен в наиболее общем классе функций.

4. Заключение. Остановимся на некоторых особенностях алгоритма, соответствующего разработанному подходу.

Прежде всего отметим, что для конкретной его реализации надо уметь вычислять с требуемой точностью собственные значения λ_n при $|n| \le N$. Получение же значений как собственных функций, так и функции Грина (и их соответствующих производных) труда не представляет, поскольку фундаментальную систему уравнения (1) можно вычислить с любой точностью решением соответствующих начальных задач при заданном $\lambda \in \mathbb{C}$.

Псевдообращение матрицы системы (10) рекомендуется осуществлять с двойной (а то и бо̀льшей) точностью, минимизируя ошибки накопления.

Численные эксперименты подтверждают повышенную эффективность вышеизложенного метода по сравнению с подходом работы [17]. Так, в случае классических рядов Фурье точность и устойчивость соответствующего алгоритма (при неизвестных заранее скачках разлагаемой функции), как правило, оказалась выше, чем алгоритма КЭГ-метода - даже при известных.

Обращает на себя внимание и тот интересный факт, что при этом гладкая на $[-1, 1]$ разлагаемая функция обычно приближается на зафиксированном отрезке $(a, b) \in [-1, 1]$ на 1-2 порядка быстрее, чем методом работы [17] - при известных скачках. В результате, хотя вблизи концов отрезка $[-1, 1]$ последний подход значительно точнее, $L_p[-1, 1]$-ошибки этих двух методов при $p \leq 1$ мало отличаются.

Отметим также , что иногда предлагаемый метод применим и в случае, когда точки $\{x_s\}$ скачков разлагаемой функции (кроме концов отрезка $[a, b]$) заранее неизвестны. Так, в случае рядов Фурье известны эффективные методы приближенного определения точек сингулярностей кусочно-гладкой функции по ее коэффициентам Фурье (см., например, [19] с библиографией).

В заключение сделаем несколько замечаний общего характера.

- В исходном представлении (8) числа q и r (в терминах [17] - порядки примененных в точках $\{x_s\}$ аппроксимантов Паде) могут зависеть и от индекса s.

- Нетрудно скорректировать формулы (11)-(13) в случае, когда $0 \in \{\omega_j\}$. Случай кратных полюсов функции Грина (см. [18], гл. 1, §3) также без труда охватывается предложенной схемой с использованием, наряду с собственными функциями, присоединенных функций.

- Интересно отметить, что в представлении (11) некоторые значения $\{\omega_j\}$ можно заранее зафиксировать, тем самым сократив количество неизвестных в уравнении (10). В частности, если применить такой подход к системе Фурье (см. введение), то при $r = q = 2\rho$, $\omega_j = i\pi(j + 1/2)$, $|j| \leq \rho$ получим быстрое разложение функции $f(x)$ по системе $\{e^{i\pi nx}\}$, $n \leq N$, с добавлением системы $\{e^{i\pi(n+1/2)x}\}$, $|n| \leq \rho$, с первыми q "промежуточными" гармониками.

- Предлагаемый метод без особых изменений переносится на случай, когда (1) - система уравнений (т.е. когда $\{p_s(x)\}$ матрицы-функции, а $y(x)$ вектор-функция), поскольку при этом коэффициенты f_n скалярны, хотя соответствующая функция Грина матрична(см. [18], гл. 3).

- Ограниченность коэффициентов уравнения (1) в граничных точках a и b (равно как и конечность самих этих точек) принципиальной роли не играет. Необходимо лишь, чтобы задача имела чисто дискретный спектр, а система собственных функций (в случае кратных полюсов функции Грина - с присоединенными) была полна в L_2. Как это следует из результатов работы [15], в которой изучены разложения Фурье-Бесселя, схема метода, в принципе, переносится на разложения по классическим системам специальных функций одного аргумента (в частности, по ортогональным полиномам).

- В случае задач на собственные значения в весовых пространствах, когда уравнение (1) имеет вид $Ly = \rho(x)\, y$, где $\rho(x)$ - кусочно-гладкая весовая функция, предлагаемый метод легко корректируется с учетом точек сингулярности $\rho(x)$(см.,например,[20]).

• Основная идея метода (рациональная аппроксимация $\{f_n\}$ и использование свойств функции Грина) представляется применимой и в некоторых многомерных задачах на собственные значения с дискретным спектром, поскольку формула (6) и ее аналог при кратных нулях функции Грина сохраняют силу, если считать n мультииндексом.

Институт математики НАН РА

Ակադեմիկոս Ա. Բ. Ներսեսյան

Սեփական ֆունկցիաներով վերլուծությունների արագացում

Աշխատանքում առաջարկվում է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համար եզրային խնդիրների՝ սեփական ֆունկցիաներով վերլուծությունների զուգամիտության արագացման եղանակ: Հիմնական մտահղացումը հիմնված է գործակիցների ռացիոնալ մոտարկման և Գրինի ֆունկցիայի կիրառման վրա: Քննարկվում են համապատասխան ալգորիթմի հատկությունները և ընդհանրացման հնարավորությունները:

Academician A. B. Nersessian

Acceleration of Convergence of Eigenfunction Expansions

A method of acceleration of convergence of eigenfunctions expansion of boundary value problems for ODE is presented. The main idea is based on the rational approximation of the expansion coefficients and on application of Green function. Properties of the corresponding algorithm and some generalization possibilities are discussed.

Литература

1. *Крылов. А.* О приближенных вычислениях. Лекции. читанные в 1906г. Санкт-Петербург. Типография Биркенфельда. 1907.

2. *Lanczos C.* — J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. B Numer. Anal. 1964. V. 1. P. 76-85.

3. *Lanczos C.* Discourse of Fourier Series. N.-Y. Hafner. 1966.

4. *Jones W. B., Hardy G.* — Math. Comp. 1970. V. 24. P. 47-60.

5. *Lyness J. N.* — Math. Comp. 1974. V. 28. P. 81-123.

6. *Tasche M.* — Math. Nachr. 1979. V. 90. P. 123-134.

7. *Baszenski G., Delvos F. J., Tasche M.* — Computers and Mathematics with Applications. 1995. V. 30. N3-6. P. 33-49.

8. *Gottlieb D., Shu C. W.* — Math. Comp. 1992. V. 43. P. 81-92.

9. *Eckhoff K. S.* — Math. Comp. 1995. V. 64. N. 210. P. 671-690.

10. *Eckhoff K. S., Wasberg C. E.* — Report N. 99. Dept. of Math. University of Bergen. 1995. P. 1-38.

11. *Gelb A., Gottlieb D.* — Computers Math. Applic. 1997. V. 33. N. 11. P. 35-58.

12. *Geer J., Banerjee N. S.* — Journal of Scientific Computing. 1997. V. 12. N. 3. P. 253-287

13. *Show J. K., Jonson L. W., Riess R. D.* — Math. Comp. 1976. V. 30. P. 469-477.

14. *Нерсесян А. Б.* — Доклады НАН Армении. 2004. Т. 104. N. 4. С. 186-191.

15. *Nersessian A., Poghosyan A.* — Central European journal of Mathematics. 2006. V. 4. N. 3. P. 435-448.

16. *Нерсесян А. Б.* — Доклады НАН Армении. 2005. Т. 105. N. 2. С. 309-316.

17. *Нерсесян А. Б.* В кн.: Математика в высшей школе. Науч.-метод. сб. 2005. Т. 2 С. 47-63.

18. *Наймарк М. А.* — Линейные дифференциальные операторы. Изд. 2-е. М. Наука. 1969.

19. *Gelb A., Tadmor E.* — Math. Modelling and Num. Analysis. 2002. V. 36. N. 2. P. 155-175.

20. *Нерсесян А. Б., Бархударян Р. Г.* — Доклады НАН Армении. 2006. Т. 106. N. 1. С. 5-12.