ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 107 2007 № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

А. М. Оганнисян

Необходимые условия первого порядка для задачи Лагранжа с бесконечными горизонтами

(Представлено академиком А. Б. Нерсесяном 9/II 2007)

Ключевые слова: *оптимальный рост, вариационное исчисление, задачи с бесконечными горизонтами*

В данной работе рассматривается задача Лагранжа с бесконечными горизонтами, для которой приводятся необходимые условия первого порядка. Кроме того нами формулируется лемма о скруглении углов для задачи Лагража с конечными и бесконечными горизонтами. Работа основывается на результатах статьи французских математиков Блота и Мичела [1], установивших необходимые условия для простейшей задачи вариационного исчисления с бесконечными горизонтами, которая отличается от задачи Лагранжа отсутствием условия $\Phi(t, x_1, x_2) = 0$. Основным побуждением для изучения такого типа задач является теория оптимального роста, которая составляет одну из важнейших глав теории современной макроэкономики (см. [2-9]).

Экстремальная задача

$$\begin{cases} I(x) = \int\limits_t^\infty f(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to \sup, \\ \Phi(t, x_1, x_2) = 0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (P1)$$

называется задачей Лагранжа с бесконечными горизонтами. Здесь $x = x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, n берется равным 2 для геометрической наглядности. В дальнейшем $f : [t_0, +\infty) \times \Omega \times R^2 \to R^1$, где Ω некоторое множество в R^2, а $\Phi : [t_0, +\infty) \times R^1 \times R^1 \to R^1$, причем обе функции дважды непрерывно дифференцируемы в своих областях определений. При таких ограничениях задачу (P1) будем называть гладкой. Функционал I определяется на функциях $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, где $x(t) \in C^1\{[t_0, +\infty); R^2\}$. В этой статье приводятся результаты, касающиеся слабых решений (P1). Добавим, что $(t_0, x_0) = (t_0, x_{01}, x_{02})$, причем $\Phi(t_0, x_0) = 0$ (т.е. $\Phi(t_0, x_{01}, x_{02}) = 0$), другими словами, точка (t_0, x_0) принадлежит фиксированной поверхности $\Phi(t, x_1, x_2)$.

Определение 1. *Функцию $x = x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ будем называть допустимой кривой для задачи (P1), если выполняются следующие условия:*

- $x(t) \in C^1\{[t_0, +\infty); R^2\}$,
- $x(t_0) = x_0$,
- $\Phi(t, x_1(t), x_2(t)) \equiv 0$ для $\forall t \in [t_0, +\infty)$, причем интеграл $\int\limits_t^\infty f(t, x(t), \dot{x}(t))dt$ сходится

Определение 2. *Функция $x = x^*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t))$ есть слабое решение (P1), если*

- $x = x^*(t)$ допустимая кривая для (P1)
- $\exists s(t) \in C\{[t_0, +\infty), (0, +\infty) : \forall x = x(t)\}$ допустимой кривой, удовлетворяющей $||x(t) - x^*(t)|| + ||\dot{x}(t) - \dot{x}^*(t)|| < s(t)$, $\forall t \in [t_0, +\infty) \Longrightarrow I(x) \leq I(x^*)$,

Замечание 1. $||x(t) - x^*(t)||$, $\forall t \in [t_0, +\infty)$ есть норма в R^2. Если $x^*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t))$, то через $\Phi_{x_1}^*$, $\Phi_{x_2}^*$ обозначим соответственно $\Phi_{x_1}^*(t) = \Phi_{x_1}^*(t, x_1^*(t), x_2^*(t))$, $\Phi_{x_2}^*(t) = \Phi_{x_2}^*(t, x_1^*(t), x_2^*(t))$.

Теорема 1. *Пусть задача (P1) гладкая, $x = x^*(t)$ ее слабое решение такое, что для любого $[r_1, r_2] \subset [t_0, +\infty)$ выполняется $x^*(t) \in C^2\{[r_1, r_2], R^2\}$, причем*

$$[\Phi_{x_1}^*(t)]^2 + [\Phi_{x_{12}}^*(t)]^2 > 0, \forall t \in [t_0, +\infty). \tag{1}$$

Тогда существует $p = p^*(t) \in C[t_0, +\infty)$ множитель Лагранжа, так что имеет место условие Эйлера

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dt} L_{\dot{x}_1}^* + L_{x_1}^* \equiv 0, \\ -\dfrac{d}{dt} L_{\dot{x}_2}^* + L_{x_2}^* \equiv 0, \end{cases} \qquad \text{для} \qquad \forall t \in [t_0, +\infty),$$

где $L(t, x, \dot{x}) = f(t, x, \dot{x}) + p^*(t)\Phi(t, x)$, а $L_{x_i}^*$ и $L_{\dot{x}_i}^*$ определяютя как

$$L_{x_i}^*(t) := L_{x_i}(t, x_1^*(t), x_2^*(t), \dot{x_1}^*(t), \dot{x_2}^*(t))$$

$$L_{\dot{x}_i}^*(t) := L_{\dot{x}_i}(t, x_1^*(t), x_2^*(t), \dot{x_1}^*(t), \dot{x_2}^*(t)), \quad i = 1, 2.$$

Обозначим через l^* график слабого решения $x = x^*(t)$, т.е. совокупность точек $(t, x_1^*(t), x_2^*(t))$ для $\forall t \in [t_0, +\infty)$. Возьмем произвольную точку $\widetilde{M}(\widetilde{t}, x_1^*(\widetilde{t}), x_2^*(\widetilde{t})) \in l^*$, где $\widetilde{t} \in [t_0, +\infty)$. Из условия (1) следует, что одна из величин $\Phi_{x_1}^*(\tilde{t})$, $\Phi_{x_2}^*(\tilde{t})$ отлична от нуля. Для определенности положим, что

$\dfrac{\Phi(\tilde{t}, x_1{}^*(\tilde{t}), x_2{}^*(\tilde{t})}{\partial x_2} = \Phi^*_{x_2}(\tilde{t}) \neq 0$. В этом случае, в силу теоремы о неявной функции (см. [10]), в некоторой ε_0 - окрестности точки $(\tilde{t}, x_1{}^*(\tilde{t})) \in U_{\varepsilon_0}(\tilde{t}, x_1{}^*(\tilde{t}))$ существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $x_2 = \psi(t, x_1)$ такая, что для $\forall(t, x_1) \in U_{\varepsilon_0}(\tilde{t}, x_1{}^*(\tilde{t}))$ имеет место

$$\Phi(t, x_1, \psi(t, x_1)) \equiv 0. \tag{2}$$

Введем функцию

$$f_1(t, x_1, \dot{x_1}) := f(t, x_1, \psi(t, x_1), \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}\dot{x_1})$$

и выберем точки $(\tau_1, x_1^*(\tau_1))$, $(\tau_2, x_1^*(\tau_2))$ так, чтобы $\tilde{t} \in (\tau_1, \tau_2)$ и $(\tau_1, x_1^*(\tau_1)) \in U_{\varepsilon_0}(\tilde{t}, x_1{}^*(\tilde{t}))$, $i = 1, 2$, более того, для $\tilde{t} \in [\tau_1, \tau_2]$ и $(t, x_1^*(t)) \in U_{\varepsilon_0}(\tilde{t}, x_1{}^*(\tilde{t}))$. Теперь введем в рассмотрение две задачи: (P2) - задачу Лагранжа с конечными горизонтами и (P3) - простейшую задачу вариационного исчисления

$$\begin{cases} I(x(t)) = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to \sup, \\ \Phi(t, x_1, x_2) = 0, \\ x(\tau_1) = x^*(\tau_1), \\ x(\tau_2) = x^*(\tau_2); \end{cases} \tag{$P2$}$$

$$\begin{cases} I_1(x_1(t)) = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} f_1(t, x_1(t), \dot{x_1}(t))dt \to \sup, \\ x_1(\tau_1) = x_1^*(\tau_1), \\ x_1(\tau_2) = x_1^*(\tau_2); \end{cases} \tag{$P3$}$$

Очевидны следующие утверждения.

Предложение 1. Задачи (P2) и (P3) эквивалентны.

Замечание 2. Эквивалентность надо понимать следующим образом: если $x = x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ является решением (P2), так что $(t, x_1(t)) \in U_{\varepsilon_0}(\tilde{t}, x_1{}^*(\tilde{t}))$ для $\forall\ \tilde{t} \in [\tau_1, \tau_2]$, то $x_1(t)$ является решением задачи (P3) ; если же $x = x_1(t)$ является решением задачи (P3), так что $(t, x_1(t)) \in U_{\varepsilon_0}(\tilde{t}, x_1{}^*(\tilde{t}))$ для $\tilde{t} \in [\tau_1, \tau_2]$, то $x = x(t) = (x_1(t), \psi(t, x_1(t))$ есть решение задачи (P2).

Предложение 2. Пусть $x = x^*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t))$ есть слабое решение задачи (P1), тогда

(i) сужение $x = x^*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t))$ на сегмент $[\tau_1, \tau_2]$ есть слабое решение задачи (P2), если

$$(t, x_1^*(t)) \in U_{\varepsilon_0}(\tilde{t}, x_1{}^*(\tilde{t})) \ \text{ для } \ t \in [\tau_1, \tau_2];$$

(ii) сужение $x = x_1^*(t)$ для $t \in [\tau_1, \tau_2]$ есть слабое решение задачи (P3), если

$$(t, x_1^*(t)) \in U_{\varepsilon_0}(\tilde{t}, x_1{}^*(\tilde{t})) \ \text{ для } \ t \in [\tau_1, \tau_2].$$

Можно доказать более сильное утверждение, чем утверждение (i) в предложении 2. Приведем его.

Предложение 3. Если $x = x(t)$ является слабым решением задачи (P1), то сужение $x(t)$ на любой сегмент $[\tau_1, \tau_2] \subset [t_0, +\infty)$ есть слабое решение задачи (P2).

Замечание 3. Предложения (1,2,3) играют существенную роль при доказательстве теоремы 1. Так же как и в [1] техника скругления углов играет для нас основополагающую роль. Заметим, что лемма о скруглении углов для задачи Лагранжа с конечными горизонтами и тем более для задачи с бесконечными горизонтами была до сих пор не доказана. Без сомнения, леммы о скруглении углов для этих задач представляют также автономый интерес.

Приведем формулировку этой леммы для задач с бесконечными горизонтами. Для этого дадим определения следующих пространств:

$C^1\{[t_0, +\infty), R^2\}$ есть, как всегда, класс непрерывно дифференцируемых функций на $[t_0, +\infty)$ со значением в R^2;

$PC^1\{[t_0, +\infty), R^2\}$ является пространством непрерывных функций из $[t_0, +\infty)$ в R^2 таким, что сужение любой функции из этого класса на $[r_1, r_2] \subset [t_0, +\infty)$ кусочно непрерывно дифференцируемая функция в обычном смысле, т.е. имеет конечное число точек разрыва первой производной первого рода на $[r_1, r_2]$;

$FPC^1\{[t_0, +\infty), R^2\}$ есть пространство элементов из $PC^1\{[t_0, +\infty), R^2\}$, у которых точки разрыва 1-ой производной конечное число.

Введем определение $domI$:

$$domI = \{x(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in PC^1\{[t_0, +\infty), R^2\} | \forall t \in [t_0, +\infty) \Phi(t, x_1(t), x_2(t)) \equiv 0,$$

$$\int\limits_{t_0}^{+\infty} f_1(t, x(t), \dot{x}(t)) dt < +\infty\}$$

Сформулируем теперь теорему о скруглении углов для задачи (P1).

Теорема 2. *Если функция* $f(t, x(t), \dot{x}(t))$ *непрерывна по совокупности аргументов на* $[t_0, +\infty) \times \Omega \times R^2$, *а* $\Phi(t, x_1, x_2)$ *дважды непрерывно дифференцируема на* $[t_0, +\infty) \times R^1 \times R^1$, *причем для каждого* (t, x_1, x_2), *для которого* $\Phi(t, x_1, x_2) \equiv 0$, *имеет место*

$$\Phi^2_{x_1}(t, x_1, x_2) + \Phi^2_{x_2}(t, x_1, x_2) > 0,$$

тогда

$$(i) \quad \sup\{I(x) : x \in domI \cap FPC^1\{[t_0, +\infty), R^2\}, x(t_0) = x_0\} =$$

$$= \sup\{I(x) : x \in domI \cap C^1\{[t_0, +\infty), R^2\}, x(t_0) = x_0\},$$

$$(ii) \quad \text{для} \quad x \in domI \cap FPC^1\{[t_0, +\infty), R^2\} \quad \text{с} \quad x(t_0) = x_0$$
$$\text{и для} \quad s(t) \in C^0\{[t_0, +\infty), (0, +\infty)\}$$
$$\sup\{I(y) : y \in domI \cap FPC^1\{[t_0, +\infty), R^2\}, y(t_0) = x_0,$$
$$\forall t \in [t_0, +\infty), ||x(t) - y(t)|| < s(t)\} =$$
$$= \sup\{I(y) : y \in domI \cap C^1\{[t_0, +\infty), R^2\}, y(t_0) = x_0, \forall t \in [t_0, +\infty), ||x(t) - y(t)|| < s(t)\}.$$

Замечание 3. Лемма о скруглении углов для задачи Лагранжа с конечными горизонтами формулируется точно так же, как теорема 2, но только $+\infty$ заменяется на $t_1 < +\infty$.

Ереванский государственный университет

Ա. Մ. Հովհաննիսյան

Լագրանժի՝ անվերջ հորիզոններով խնդրի համար առաջին կարգի անհրաժեշտ պայմանները

Տվյալ հոդվածում դիտարկվում է Լագրանժի խնդիրը անվերջ հորիզոններով, որի համար ձևակերպվում են Էյլեր - Լագրանժի էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանները և բերվում է անկյունների ողորկման լեմման:

A. M. Hovhannisyan

First-Order Necessary Conditions for the Lagrange Problem with Infinite-Horizon

In this paper we establish the first-order necessary conditions (Euler-Lagrange conditions) for Lagrange problem with infinite-horizon. For that problem we also define and obtain the Rounding-Off Corners Lemma.

Литература

1. *Blot J., Michel P.* — Journal of Optimization Theory and Applications. 1996. February. V. 88. Issue 2. P. 339-364.

2. *Sargent T. S.* — Macroeconomic Theory. 2nd Edition. Academic Press. New York. 1986.

3. *Intriligator M. D.* — Mathematical Optimization and Economic Theory. Prentice-Hall. Englewood Cliffs. New Jersey. 1971.

4. *Boldrin M., Woodford M.* — Edited by J. Benhabib. Princeton University Press. Princeton. New Jersey. 1992. P. 8-43.

5. *Ramsey F.* — Economic Journal. 1928. V. 38. P. 543-549.

6. *Cinquini S.* — Annali della Scuola Normale Superiore de Pisa. 1940. Serie 2. V. 9. P. 258-261.

7. *Faedo S.* — Commentationes. Pontificia Academia Scientarium. 1944. V. 8. P. 319-421.

8. *Faedo S.* — Rendiconti di Matematica e delle Sue Applicazioni. 1949. V. 8. P. 94-125.

9. *Faedo S.* — Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. 1968. V. 7. P. 91-132.

10. *Кудрявцев Л. Д.* — Математический анализ. Т. 2. М. 1970.