ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 107 2007 №1

Ì ÅÕÀ Í ÈÊÀ

УДК 539.1

À. Í. Ìàðòèðîñÿí, Ã. À. Ìàðòèðîñÿí, Ê. Ñ. Êîñòàíäÿí, À. Ñ. Äèíóíö

Ýôôåêòèâíîå ðåøåíèå íåñòàöèîíàðíîé ñìåøàííîé ãðàíè÷íîé çàäà÷è äëÿ óïðóãîé ïîëóïëîñêîñòè

(Представлено чл.-кор НАН РА А.Г. Багдоевым 13/IX 2006)

Êëþ÷åâûå ñëîâà: *уравнение Винера - Хопфа, смешанная граничная задача, компоненты перемещений*

Рассматривается нестационарная плоская задача о движении изотропной упругой среды, занимающей полуплоскость $y > 0$. На границе $x > 0$ задано горизонтальное перемещение и вне нее граница свободна от напряжений, на всей границе вертикальная компонента напряжений также равна нулю. Эта постановка отличается от задачи о гладком штампе [1] и соответствует постановке, которая в статической, пространственной задаче дана в [2], а в нестационарной задаче - в [3] и физически может быть интерпретирована как задача по передаче горизонтальных перемещений от упругой, не сопротивляющейся изгибу пластины к полупространству.

В настоящей статье для плоской задачи дается простое замкнутое решение в квадратурах.

Решение ищется методом интегральных преобразований Лапласа по времени t и Фурье по координате x и приводится к уравнению Винера - Хопфа. Дается обращение интегральных преобразований с приведением решения к форме Смирнова - Соболева. Найдено распределение касательного напряжения вдоль положительной полуоси $x > 0$. Определено также распределение горизонтального перемещения на полуоси $x < 0$.

Вычислен коэффициент интенсивности касательных напряжений около края $x = 0$. Задача о движении упругого полупространства при смешанных граничных условиях на его поверхности решена аналитически и численно в работе [3]. Соответствующая статическая задача другим методом решена в [2].

Динамическая плоская задача о штампе, приложенном на полубесконечной оси, вне которого нормальное напряжение равно нулю, а касательное напряжение всюду на границе равно нулю, методом интегральных преобразований и Винера - Хопфа решена в [1,4].

В работе [3] решается более сложная задача для системы двух уравнений Винера - Хопфа с приведением к системе интегральных уравнений Фредгольма методом [5].

В настоящей работе решается несколько отличная от [1,4] плоская задача, соответствующая пространственной задаче работы [3].

Уравнения движения в перемещениях для изотропной среды в плоском случае при отсутствии массовых сил имеют вид

$$\begin{aligned} a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b^2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (a^2-b^2)\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \\ a^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + b^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (a^2-b^2)\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \end{aligned} \tag{1}$$

где U, V компоненты перемещений, a и b скорости продольных и поперечных волн. Рассмотрим следующую сингулярную граничную задачу ($y=0$):

$$\begin{aligned} &\sigma_{yy} = \rho\left[(a^2-2b^2)\frac{\partial U}{\partial x} + a^2\frac{\partial V}{\partial y}\right] = 0, \quad -\infty < x < \infty, \\ &\sigma_{xy} = \rho b^2\left[\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right] = 0 \qquad \text{при } x<0, \\ &U = -PH(x)f(t) \qquad \text{при } x>0, \end{aligned} \tag{2}$$

$U, V = O(r^{1/2})$, $r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$ (условие на ребре), где $P=\mathrm{const}$, ρ - плотность среды, $H(x)$ - единичная функция, $f(t)$ - ограниченная функция при $t>0$. Производную $f'(t)$ следует понимать как обобщенную, и в частном случае, когда $f(t)=H(t)$, мы имеем $f'(t)=\delta(t)$.

Применяя преобразование Лапласа по t и Фурье по x к уравнениям (1) и к граничному условию (2), получаем уравнение Винера - Хопфа

$$\begin{aligned} &\overline{\overline{V}}_n = \frac{a^2\overline{\beta}_1^2 - b^2\overline{\beta}_n^2}{(a^2-b^2)\overline{\alpha}\overline{\beta}_n}\overline{\overline{U}}_n, \quad \overline{U};\overline{V} = \sum_{k=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\overline{\alpha}x + i\overline{\beta}_k y}\overline{\overline{U}}_n;\overline{\overline{V}}_n d\overline{\alpha}, \\ &\frac{\omega^2\overline{\beta}_2\Omega^-(\overline{\alpha})}{b^4\rho i R(\overline{\alpha})} = -\frac{P\overline{f}(s)}{2\pi i\overline{\alpha}} + U^+(\overline{\alpha}), \overline{\beta_n} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_n^2} - \overline{\alpha}^2}, \quad c_1 = a, \quad c_2 = b, \end{aligned} \tag{3}$$

$R(\overline{\alpha}) = \left(\frac{\omega^2}{b^2} - 2\overline{\alpha}^2\right)^2 + 4\overline{\alpha}^2\overline{\beta}_1\overline{\beta}_2$ - функция Рэлея, $s = -i\omega$ - параметр преобразования Лапласа

$$\begin{aligned} &\Omega^- = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty e^{-i\overline{\alpha}x}dx\int\limits_0^\infty \sigma_{xy}e^{-st}dt, \quad U^+ = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^0 e^{-i\overline{\alpha}x}dx\int\limits_0^\infty Ue^{-st}dt, \\ &\overline{\overline{U}}_2 = \frac{\omega^2 - 2b^2\overline{\alpha}^2}{2b^2\overline{\alpha}^2}\overline{\overline{U}}_1, \qquad \overline{\overline{U}}_1 = \frac{2\overline{\beta}_2\overline{\alpha}_2}{b^2\rho i R(\overline{\alpha})}\Omega^-(\overline{\alpha}). \end{aligned} \tag{4}$$

Заметим, что $R(\overline{\alpha}) = \omega^4 R\left(\frac{\overline{\alpha}}{\omega}\right) = \omega^4 R(\alpha)$, $\overline{\alpha} = \alpha\omega$, где $R(\alpha) = \left(\frac{1}{b^2} - 2\alpha^2\right)^2 + 4\alpha^2\sqrt{\left(\frac{1}{a^2} - \alpha^2\right)\left(\frac{1}{b^2} - \alpha^2\right)}$ - правая часть уравнения Рэлея ($R(\alpha) = 0$), являющаяся однозначной аналитической функцией в плоскости α с разрезом $\left[-\frac{1}{b}, -\frac{1}{a}\right]$, $\left[\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right]$ и имеющая там два действительных корня $\alpha = \pm\frac{1}{c_R}$.

Путь интегрирования в плоскости $\overline{\alpha}$ представлен на рис 1.

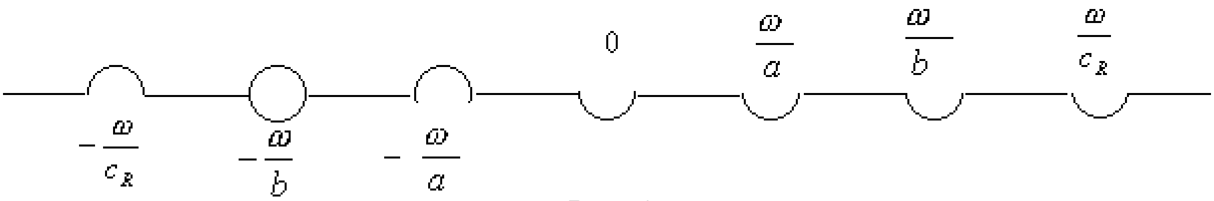

Рис. 1

Для решения уравнения Винера - Хопфа (3) нужно сделать факторизацию функции Рэлея, которую можно представить в следующем виде [6]:

$$R(\overline{\alpha}) = 2\left(\frac{\omega^2}{b^2} - \frac{\omega^2}{a^2}\right)\overline{\beta}_1\overline{\beta}_2 F(\overline{\alpha}), \tag{5}$$

где $F(\overline{\alpha})$ аналитична в полосе (рис 2.). $\operatorname{Im} d_1 < \operatorname{Im}\overline{\alpha} < \operatorname{Im} d_2$, $-\operatorname{Im}\frac{\omega}{a} < \operatorname{Im} d_1 < \operatorname{Im} d_2 < \operatorname{Im}\frac{\omega}{a}$ и не имеет нулей, причем здесь ω считается комплексным. Ветви радикалов $\sqrt{\frac{1}{c_n} \pm \frac{\overline{\alpha}}{\omega}}$ выбраны так, что при $\overline{\alpha} = 0$ они положительны, а ветвь логарифма выбрана так, что при $\zeta = 0$ его аргумент равен нулю. Функция $F(\overline{\alpha})$ в указанной полосе стремится к единице при $|\overline{\alpha}| \to \infty$.

С помощью формулы Коши можно представить $F(\overline{\alpha})$ в указанной полосе в виде

$$F(\overline{\alpha}) = F^+(\overline{\alpha})F^-(\overline{\alpha}),$$

$$\text{где } F^+(\overline{\alpha}) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} \ln F(\xi)\frac{d\xi}{\xi - \overline{\alpha}}\right\}, \; F^-(\overline{\alpha}) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2} \ln F(\xi)\frac{d\xi}{\xi - \overline{\alpha}}\right\}. \tag{6}$$

Деформируя контуры L_1 и L_2 так, чтобы они шли соответственно вдоль отрицательной и положительной действительных полуосей, и учитывая, что логарифмическая функция сопряжена на верхнем и нижнем берегах разрезов $\left[-\dfrac{1}{b}, -\dfrac{1}{a}\right]$ и $\left[\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}\right]$, получаем в результате для $F^{\pm}(\overline{\alpha})$ следующие выражения

$$F^{\pm}(\overline{\alpha}) = \frac{\overline{\alpha}_R \pm \overline{\alpha}}{\overline{\beta}_1^{\pm}(\overline{\alpha})\overline{\beta}_2^{\pm}(\overline{\alpha})} X^{\pm}(\overline{\alpha}),\ X^{\pm}(\overline{\alpha}) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mp 1/a}^{\mp 1/b} \ln\frac{R(\zeta)}{\overline{R(\zeta)}}\frac{d\zeta}{\zeta - \dfrac{\overline{\alpha}}{\omega}}\right\}, \qquad (7)$$

$$R(\zeta) = \left(\frac{1}{b^2} - 2\zeta^2\right)^2 + 4i\zeta^2\sqrt{\zeta^2 - \frac{1}{a^2}}\sqrt{\frac{1}{b^2} - \zeta^2}, \quad \overline{\beta}_n^{\pm} = \sqrt{\frac{\omega}{c_n} \pm \overline{\alpha}}, \quad \overline{\alpha}_R = \frac{\omega}{c_R},$$

где $F^{+}(\overline{\alpha})$ и $F^{-}(\overline{\alpha})$ аналитичны и не имеют нулей соответственно в верхней $(\operatorname{Im} d_1 < \operatorname{Im}\overline{\alpha})$ и нижней $(\operatorname{Im}\overline{\alpha} < \operatorname{Im} d_2)$ полуплоскостях.

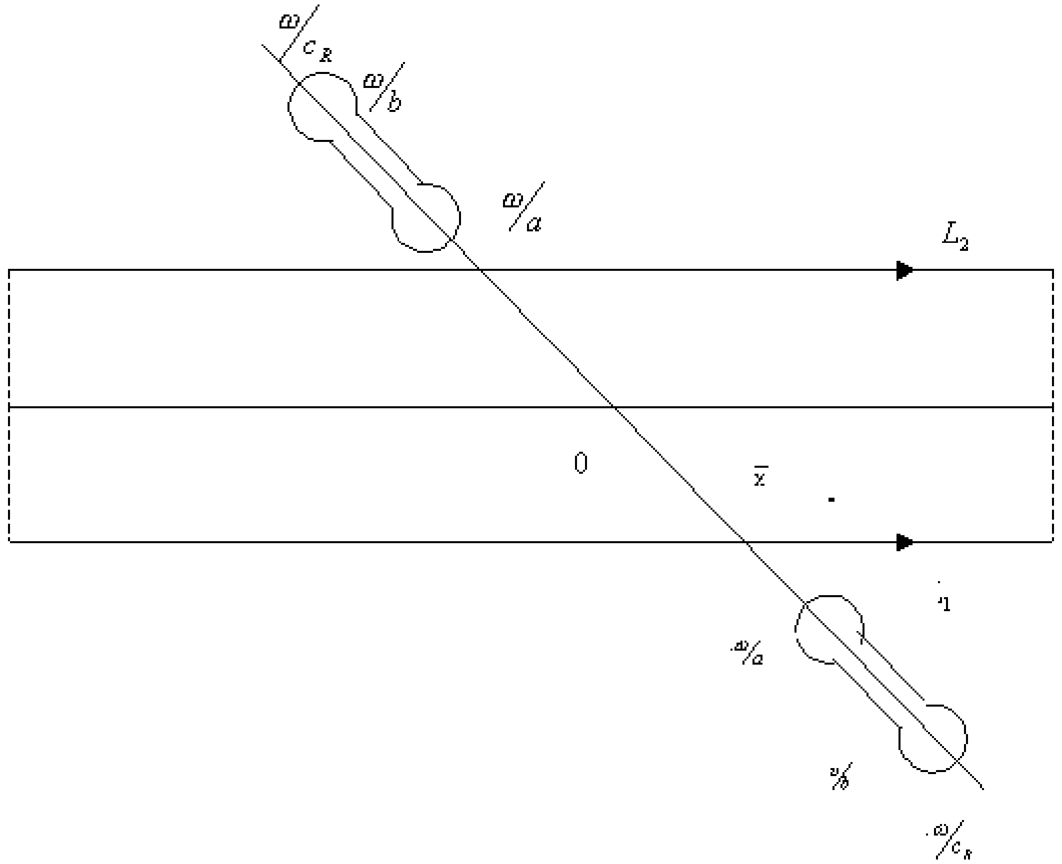

Рис. 2

Пользуясь (7) и (5), перепишем (3) в виде

$$\frac{a^2\overline{\beta}_2^{-}(\overline{\alpha})}{2b^2 i\rho(a^2 - b^2)} \cdot \frac{\Omega^{-}(\overline{\alpha})}{(\overline{\alpha}_R - \overline{\alpha})X^{-}(\overline{\alpha})} = U^{+}(\overline{\alpha})\frac{(\overline{\alpha}_R + \overline{\alpha})X^{+}(\overline{\alpha})}{\overline{\beta}_2^{+}(\overline{\alpha})} - \frac{P\overline{f}(s)}{2\pi i\overline{\alpha}} \cdot \frac{(\overline{\alpha}_R + \overline{\alpha})X^{+}(\overline{\alpha})}{\overline{\beta}_2^{+}(\overline{\alpha})}. \quad (8)$$

В уравнение (8) в обеих частях прибавив $\dfrac{P\overline{f}(s)}{2\pi i\overline{\alpha}}\cdot\dfrac{\overline{\alpha}_R X^+(0)}{\overline{\beta}_2^+(0)}$, получим

$$
\begin{gathered}
\frac{a^2\overline{\beta}_2(\overline{\alpha})}{2b^2 i\rho(a^2-b^2)}\cdot\frac{\Omega^-(\overline{\alpha})}{(\overline{\alpha}_R-\overline{\alpha})X^-(\overline{\alpha})}+\frac{P\overline{f}(s)}{2\pi i\overline{\alpha}}\cdot\frac{\overline{\alpha}_R X^+(0)}{\overline{\beta}_2^+(0)}= \\
=U^+(\overline{\alpha})\frac{(\overline{\alpha}_R+\overline{\alpha})X^+(\overline{\alpha})}{\overline{\beta}_2^+(\overline{\alpha})}-\frac{P\overline{f}(s)}{2\pi i\overline{\alpha}}\cdot\left[\frac{(\overline{\alpha}_R+\overline{\alpha})X^+(\overline{\alpha})}{\overline{\beta}_2^+(\overline{\alpha})}-\frac{\overline{\alpha}_R X^+(0)}{\overline{\beta}_2^+(0)}\right],
\end{gathered}
\tag{9}
$$

$$
X^+(0)=X^-(0)=\frac{ac_R}{b\sqrt{a^2-b^2}},\quad \overline{\beta}_2^+(0)=\frac{\omega}{b}.
$$

Выражение в правой части уравнения (9) аналитично в полуплоскости $\operatorname{Im} d_1 < \operatorname{Im}\overline{\alpha}$ и там стремится к нулю, а левая часть уравнения (9) аналитична в области $\operatorname{Im}\overline{\alpha} < \operatorname{Im} d_2$ и при $\overline{\alpha}\to\infty$ в этой области стремится к нулю. Из выполнения равенства этих частей в полосе $\operatorname{Im} d_1 < \operatorname{Im}\overline{\alpha} < \operatorname{Im} d_2$ следует, что в комплексной плоскости $\overline{\alpha}$ существует целая функция $I(\overline{\alpha})$, совпадающая в области $\operatorname{Im} d_1 < \operatorname{Im}\overline{\alpha}$ с правой частью уравнения (9), а в области $\operatorname{Im}\overline{\alpha} < \operatorname{Im} d_2$ - с левой частью (9).

Так как эта функция ограничена, то по теореме Лиувилля получаем $I(\overline{\alpha}) = \mathrm{const}$. Но поскольку $I(\overline{\alpha})\to 0$ при $\overline{\alpha}\to\infty$, то эта константа равна нулю, т. е. $I(\overline{\alpha})\equiv 0$. Отсюда, учитывая, что в полуплоскостях $\operatorname{Im} d_1 < \operatorname{Im}\overline{\alpha}$ и $\operatorname{Im}\overline{\alpha} < \operatorname{Im} d_2$ функция $I(\overline{\alpha})$ представляется соответственно правой и левой частями (9), находим

$$
\begin{gathered}
\Omega^-(\overline{\alpha})=-\frac{P\overline{f}(s)}{2\pi i\overline{\alpha}}\cdot\frac{\overline{\alpha}_R X^+(0)}{\overline{\beta}_2^+(0)}\cdot\frac{2b^2 i\rho(a^2-b^2)(\overline{\alpha}_R-\overline{\alpha})X^-(\overline{\alpha})}{a^2\overline{\beta}_2^-(\overline{\alpha})}, \\
U^+(\overline{\alpha})=\frac{P\overline{f}(s)}{2\pi i\overline{\alpha}}\cdot\left[\frac{(\overline{\alpha}_R+\overline{\alpha})X^+(\overline{\alpha})}{\overline{\beta}_2^+(\overline{\alpha})}-\frac{\overline{\alpha}_R X^+(0)}{\overline{\beta}_2^+(0)}\right]\cdot\frac{\overline{\beta}_2^+(\overline{\alpha})}{(\overline{\alpha}_R+\overline{\alpha})X^+(\overline{\alpha})}.
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Применяя к (10) обратное преобразование Лапласа по α и s, находим оригиналы

$$
\sigma_{yy}(x,0,t)=-\frac{P}{2\pi i}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{st}i\overline{s}}{2\pi}ds\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-s\alpha x}2b\sqrt{b}ac_R\rho\sqrt{a^2-b^2}}{\alpha\beta_2^-(\alpha)}\left(\frac{1}{c_R}-\alpha\right)X^-(\alpha)d\alpha, x>0,
$$

$$
U(x,0,t)=\frac{P}{2\pi i}\cdot\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{1}{2\pi i\alpha}\left[1-\frac{X^+(0)\sqrt{b}\sqrt{\dfrac{1}{b}+\alpha}}{c_R\left(\dfrac{1}{c_R}+\alpha\right)X^+(\alpha)}\right]d\alpha, x<0; \tag{11}
$$

контур интегрирования по α показан на рис.1, причем в подынтегральной функции всюду подставлено $\omega=1$.

Деформируя контур интегрирования по α в выражении для σ_{xy} вдоль разреза $\left(\frac{1}{a},\infty\right)$ при $x>0$ и вдоль разреза $(-\infty,-1)$ в интеграле для $U(x,0,t)$ (а затем делая замену α на $-\alpha$ в $U(x,0,t)$), приводим (11) к виду

$$\sigma_{xy}(x,0,t)=2P\rho a^2c_Rbf'(t)-\frac{P}{\pi}b\sqrt{b}ac_R\rho\sqrt{a^2-b^2}H(\frac{t}{x}-\frac{1}{a})\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{1/a}^{1/x}\frac{if(t-\alpha x)(c_R^{-1}-\alpha)}{\alpha\sqrt{b^{-1}-\alpha}}\left(1-\frac{\overline{R}}{R}H\left(\frac{1}{b}-\alpha\right)\right)d\alpha,\ x>0, \tag{12}$$

$$U(x,0,t)=\frac{P}{\pi}\frac{aH(t+\frac{x}{a})}{\sqrt{b}\sqrt{a^2-b^2}}\int\limits_{1/a}^{1/x}\frac{f(t+\alpha x)\sqrt{b^{-1}-\alpha}}{\alpha(c_R^{-1}-\alpha)X^-(\alpha)}\left(1-\frac{\overline{R}}{R}H\left(\frac{1}{b}-\alpha\right)\right)d\alpha,\ x<0.$$

Для коэффициента интенсивности напряжений из (12) получим следующее выражение:

$$\sigma_{xy}(x,0,t)==\frac{P}{\pi}b\sqrt{b}ac_R\rho\sqrt{a^2-b^2}H(t)\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t\frac{f(\alpha')}{\sqrt{x}\sqrt{t-\alpha'}}d\alpha'. \tag{13}$$

В точке $x=0$ имеется интегрируемая особенность типа $x^{-1/2}$.

Горисский государственный университет

Ա. Ն. Մարտիրոսյան, Հ. Ա. Մարտիրոսյան, Ք. Ս. Կոստանդյան, Ա. Ս. Դինունց

Առաձգականության տեսության ոչ ստացիոնար խառը եզրային խնդրի էֆեկտիվ լուծումը

Դիտարկվում է ոչ ստացիոնար խառը եզրային խնդիրը իզոտրոպ կիսահարթություն զբաղեցնող առաձգական միջավայրի համար: Նրա եզրում աջ կիսաառանցքի վրա, տրված է հորիզոնական տեղափոխությունը, և նրանից դուրս եզրը ազատ է լարումներից. ամբողջ եզրի վրա լարումների նորմալ բաղադրիչները զրո են:

Լուծումը փնտրվում է ըստ ժամանակի՝ Լապլասի, ըստ կոորդինատի՝ Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդով, և այն բերվում է Վիներ-Հոպֆի հավասարման, որը լուծվում է էֆեկտիվ ճանապարհով: Տրվում է ինտեգրալ ձևափոխությունների շրջումը՝ բերելով լուծումը Սմիռնով-Սոբոլևի տեսքի: Ստացված է շոշափող լարման բաշխումը և հորիզոնական տեղափոխությունը կիսաառանցքների վրա: Հաշվարկված է լարումների ինտենսիվության գործակիցը եզրային կետի շրջակայքում:

A. N. Martirosyan, G. A. Martirosyan, K. S. Kostandyan, A. S. Dynunts

Effective Solution of Nonstationary Mixed Boundary Value Problem for the Elastic Half-Plane

It is considered the dynamic plane problem on motion of isotrop elastic media, occupying the half-plane, on the surface of which along the right semiaxis the horizontal displacement component is done, and out of it the surface is free from stresses, and along the whole surface the vertical component of stresses is zero. The solution is obtained by the integral transformation method and by the solution of Wienner-Hopf equation.

Ëèòåðàòóðà

1. *Флитман Л. М.* - ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 4. С. 697-705.

2. *Петросян С.З.* Об одном классе смешанных задач для неоднородного по степенному закону упругого полупространства. Канд. дис. Ин-т механики НАН РА. Ереван. 2002.

3. *Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н., Мартиросян Г. А., Погосян С. М.* - Математика в высшей школе. Чартарагет. Ереван. 2005. Т. 1. N 2.

4. *Поручиков В. Б.* Методы динамической теории упругости. М. Наука. 1986. 328 с.

5. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М. Наука. 1970. 379 с.

6. *Нобл Б.* Применение метода Винера - Хопфа для решения дифференциальных уравнений с частными производными. М. ИЛ. 1962. 278 с.