

Ի ԹԵՔԵՆԱԿԻ ԱՅ Ի ԱԾԱԻ ԱԾԵՔԱ

УДК 519.1

Ն. Ի . Ածծաի յի

Ի äëèì àõ öóí èêî âûõ ðàññî çî àðùèõ ñèñòàì â èèàñña ääóõýèà àí òí ûõ
ïîäì íîæàñòâ

(Представлено чл.-кор. НАН РА И.Д. Заславским 15/ХІІ 2006)

Եթ-աաւâ ñîîââ: *распознающие системы, пересечение множеств, тупиковость, максимальная мощность*

Рассматривается вопрос о количестве элементов в тупиковых множествах (системах), принадлежащих классу двухэлементных множеств и распознающих данное конечное множество. Напомним вначале некоторые определения из [1-3]. Рассмотрим конечное множество $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 3$. Через $R[n]$ обозначим множество подмножеств множества $[n]$. Пусть n^* является подмножеством множества $R[n]$.

Ի ïðäâäëäí èà 1. Будем говорить, что элемент $i \in [n]$ распознаваем в n^* , если в n^* существуют такие подмножества множества $[n]$ (как элементы множества n^*), пересечение которых равняется $\{i\}$.

Ի ïðäâäëäí èà 2. Будем говорить, что n^* распознает множество $[n]$, если любой элемент $i \in [n]$ распознаваем в n^* .

С формальной точки зрения, так как $R[n]$ распознает множество $[n]$, то класс распознающих множеств (систем) для $[n]$ заведомо не является пустым.

В дальнейшем будут рассматриваться только такие распознающие системы, которые состоят лишь из двухэлементных множеств, и это ограничение в данной статье будет всюду подразумеваться. В частности, говоря о минимальности и тупиковости распознающих систем, мы будем рассматривать эти понятия лишь в рамках указанного класса распознающих систем. Определим классические понятия минимальности и тупиковости для вышеупомянутых объектов.

Ī ï ðäääëäí èà 3. Множество n^* , распознающее $[n]$, называется тупиковым, если любое собственное подмножество множества n^* не распознает $[n]$.

Ī ï ðäääëäí èà 4. Множество n^* , распознающее $[n]$, называется минимальным, если не существует множества, распознающего $[n]$, с мощностью меньшей, чем $|n^*|$.

Если рассматривается минимум (максимум) не в классе всех распознающих систем, а только в определенном его подклассе, то такие минимумы (максимумы) иногда будем называть локальными минимумами (максимумами).

Пусть n^* является распознающей системой, причем все ее элементы взяты только из класса двухэлементных подмножеств. Любой такой распознающей системе можно сопоставить граф следующим образом: каждому элементу $i \in [n]$ поставим в соответствие вершину с номером i , а каждому множеству $i, j \in n^*$ поставим в соответствие ребро между вершинами с номерами i и j . В [1] доказано, что мощность минимальной распознающей системы в классе двухэлементных подмножеств $|n^*| \geq n$. Там же приведен пример распознающей тупиковой системы с мощностью $2(n - 2)$. В данной статье доказываются следующие теоремы.

Òäí ðäí à 1. При $n \geq 4$ мощность любой тупиковой распознающей системы в классе двухэлементных подмножеств $\leq 2(n - 2)$.

Òäí ðäí à 2. При $n > 4$ для каждого j в интервале $n \leq j \leq 2(n - 2)$ в классе двухэлементных подмножеств существует тупиковая распознающая система мощностью j .

Сначала приведем некоторые леммы.

Ëäí ï à 1. Для того, чтобы элемент i был распознаваем в данной системе n^* , необходимо и достаточно, чтобы существовали хотя бы два различных множества в n^* , содержащие элемент i .

Утверждение леммы следует непосредственно из определений.

Из леммы 1 очевидным образом вытекают нижеследующие леммы 2 и 3.

Ëäí ï à 2. Для того, чтобы n^* было распознающим, необходимо и достаточно, чтобы при любом i в интервале $1 \leq i \leq n$ в n^* существовали хотя бы два различных подмножества, содержащие элемент i .

Ëäí ï à 3. Для того, чтобы n^* было распознающим, необходимо и достаточно, чтобы в соответствующем графе локальная степень каждой вершины была ≥ 2 .

Учитывая лемму о рукопожатиях в теории графов [3] (число ребер в графе равно половине суммы локальных степеней всех вершин) и опираясь на неравенство $|n^*| \geq n$, получим следующую лемму.

Ëäí ï à 4. Для того, чтобы распознающая система n^* для $[n]$ была минимальной, необходимо и достаточно, чтобы в соответствующем графе

локальная степень каждой вершины была равна 2.

С другой стороны, легко убедиться в том, что если в графе локальная степень каждой вершины равна 2, то этот граф или является простым циклом, содержащим все вершины графа, или компоненты связности его являются простыми циклами, причем каждая вершина находится в каком-то цикле. Через ρ_2 обозначим множество всех вершин графа, локальная степень которых равна 2. Через ρ_3 обозначим множество всех тех вершин графа, локальная степень которых ≥ 3 . Для распознающей системы каждая вершина принадлежит или ρ_2 , или ρ_3 . Ясно, что если n^* является минимальной, то для таких систем ρ_3 пустое (на основании леммы 4). Легко убедиться в том, что при $n = 3$ и $n = 4$ соответствующие распознающие системы $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 3\}$ и $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{1, 4\}$ являются единственными тупиковыми системами (с точностью до переименования элементов без повторений).

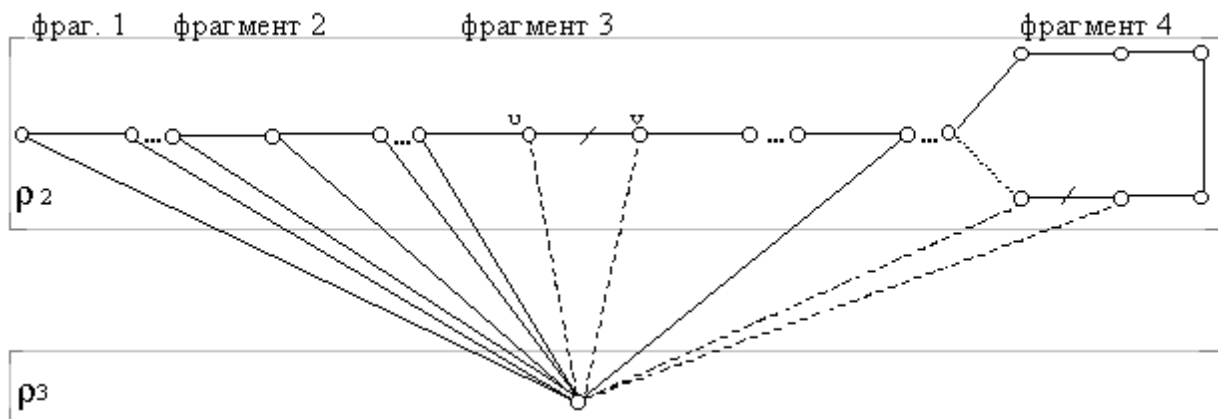


Рис 1.

Лемма 5. Для тупиковой распознающей системы ρ_2 не пусто.

Действительно, пусть ρ_2 пусто. Тогда локальная степень каждой вершины ≥ 3 . Возьмем некоторое ребро и удалим из графа. Получим, что локальная степень каждой вершины будет ≥ 2 , и по леммам 1 и 2 этого достаточно, чтобы система была распознающей. Но это противоречит тупиковости данной системы. Лемма доказана. С другой стороны, если ρ_3 пусто, то соответствующая распознающая система по лемме 4 будет минимальной.

Лемма 6. Если при $n \geq 5$ распознающая система тупиковая и не минимальная, то одновременно и ρ_2 и ρ_3 непусты.

Лемма 6. Если в тупиковой распознающей системе $|\rho_3| \geq 2$, то любые вершины u и v , локальная степень которых ≥ 3 , не могут быть смежными.

Доказательство леммы 6 аналогично доказательству леммы 5. Для неминимальных тупиковых систем при $n = 5$ возможны два случая: (1) множество ρ_3 содержит только один элемент; (2) множество ρ_3 содержит больше одного элемента. Следовательно, учитывая лемму 6 и следствие

леммы 5, получаем, что распознающие тупиковые не минимальные системы могут быть двух типов: первый тип, показанный на рис. 1, и второй тип, показанный на рис. 2.

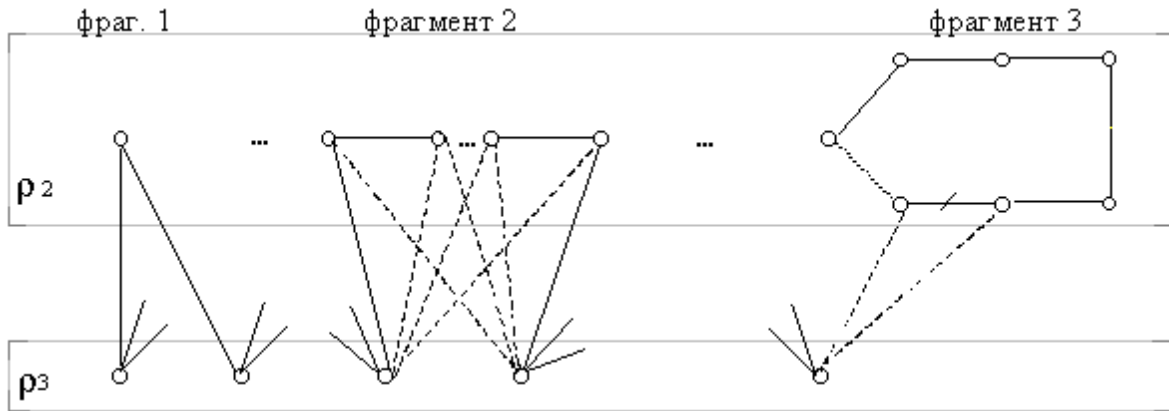


Рис 2.

Легко проверить, что любая тупиковая конструкция первого типа имеет следующий вид: множество ρ_3 состоит только из одного элемента, а вершины, принадлежащие ρ_2 , составляют цепь длиной 2 (рис. 1, фрагмент 1: под длиной цепи в данной статье понимается число вершин в цепи), или длиной 3 (рис. 1, фрагмент 2), или длиной k , $k \geq 4$ (рис. 1, фрагмент 3), или составляют простой цикл длиной k , $k \geq 3$ (рис. 1, фрагмент 4). Легко проверить также, что любая тупиковая конструкция второго типа имеет следующий вид (рис. 2): все вершины, принадлежащие ρ_3 , попарно не смежны по лемме 6, а для вершин, принадлежащих ρ_2 , возможны следующие случаи: могут быть вершины, которые смежны только с вершинами, принадлежащими ρ_3 (рис. 2, фрагмент 1), или могут быть вершины, которые составляют цепь длиной k , $k \geq 2$ (рис. 2, фрагмент 2), или могут быть вершины, которые составляют простой цикл длиной k , $k \geq 3$ (рис. 2, фрагмент 3). Во всех случаях концевые вершины цепей смежны с вершинами, принадлежащими ρ_3 .

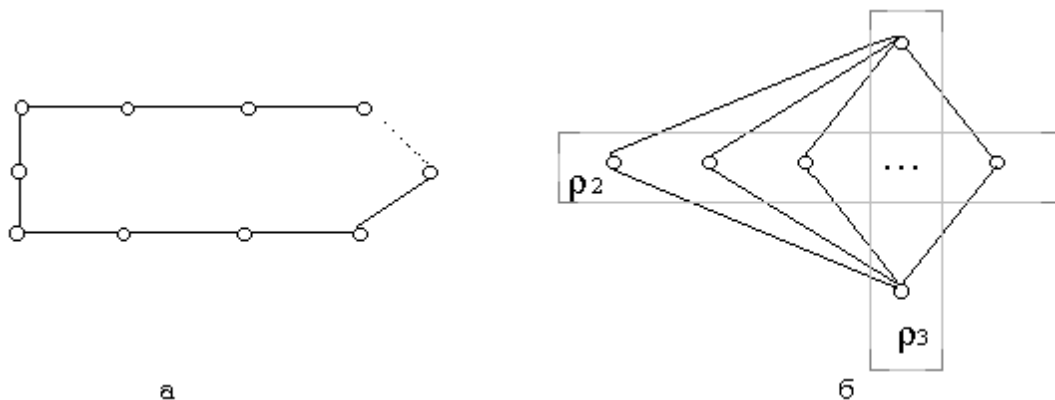


Рис 3.

В дальнейшем максимальной конструкцией первого (соответственно, второго) типа будем называть распознающую систему n^* , являющуюся

тупиковой и такой, что всякая тупиковая система первого (соответственно, второго) типа, распознающая $[n]$, имеет мощность, не превосходящую $|n^*|$.

Лемма 7. В максимальных конструкциях первого типа (локальный максимум) количество фрагментов 3 и 4 должны быть 0, а количество фрагментов 2 есть 0 при нечетном n и 1 при четном n .

Действительно, фрагмент 4 длиной k можно заменить фрагментом 2 или 3 длиной k , тем самым число ребер будет увеличиваться на единицу. Далее, из фрагментов 3, удаляя ребра между вершинами, принадлежащими ρ_2 , через одну и взамен добавляя ребра между вершиной, принадлежащей ρ_3 , и вершинами, инцидентными удаленному ребру (на рис.1 ребро (u, v) заменено ребрами, показанными пунктирными линиями), можно избавиться от фрагментов 3, причем число ребер будет только увеличиваться. Так как все вершины, принадлежащие ρ_2 , после преобразований будут снова принадлежать ρ_2 , то новая конструкция будет тупиковой. Если в конструкции будет больше одного фрагмента 2, то взамен двух фрагментов 2 можно брать 3 фрагмента 1, которые содержат 9 ребер (на одно больше, чем два фрагмента 2).

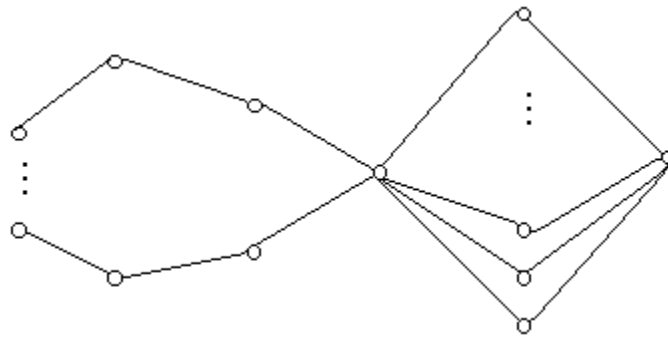


Рис 4.

Лемма 8. Максимальная конструкция первого типа будет содержать $1.5(n - 1)$ ребер при нечетном n и $1.5(n - 4) + 4$ ребер при четном n .

Лемма 8. В максимальных конструкциях второго типа (локальный максимум) количество фрагментов 2 и 3 должно быть равно нулю.

Действительно, фрагмент 3 длиной k с k ребрами можно заменить k фрагментами 1 с $2k$ ребрами, а фрагмент 2 длиной k с $k - 1$ ребрами можно заменить k фрагментами 1 с числом ребер $2(k - 1)$. Следовательно, максимальная конструкция второго типа состоит только из фрагментов 1. На рис. 2 пунктирными линиями показаны новые ребра взамен ребер между вершинами, принадлежащими ρ_2 . Ясно, что после преобразований полученная конструкция останется тупиковой, так как все вершины, принадлежащие ρ_2 , будут оставаться в ρ_2 (один конец любого ребра принадлежит ρ_2).

Лемма 8. Максимальная конструкция второго типа является двудольным графом между вершинами из ρ_2 и ρ_3 .

Теорема 9. Для максимальных конструкций второго типа имеет место $|\rho_3| = 2$.

Ясно, что число ребер в двудольном графе равно сумме локальных степеней вершин, принадлежащих ρ_2 (или ρ_3). Пусть $|\rho_3| = t$. Тогда число ребер в графе будет $2(n - t)$, так как $|\rho_2|$ равно $n - t$. А максимум $2(n - t)$ при условии $t \geq 2$ достигается при $t = 2$.

Лемма. Максимальная конструкция второго типа (локальный максимум) содержит $2(n - 2)$ ребер.

Доказательство теоремы 1 завершается сравнением двух локальных максимумов $1.5(n - 1)$ или $1.5(n - 4) + 4$ с одной стороны, $2(n - 2)$ с другой. При $n = 5$ обе конструкции имеют 6 ребер, а для $n \geq 6$ максимальным является $2(n - 2)$. Теорема 1 доказана.

Лемма. Докажем, что с помощью двух конструкций, минимальной (рис. 3, а) и максимальной (рис. 3, б), можно построить при любом j , $n \leq j \leq 2(n - 2)$, новую тупиковую конструкцию, которая содержит ровно j ребер. Заметим, что при $n = 5$ $2(n - 2) = 6$, причем минимальная конструкция содержит 5 ребер, а максимальная - 6 ребер. Рассмотрим случай $n \geq 6$. Определим операцию склеивания двух конструкций. Склеенная конструкция получается посредством отождествления некоторой вершины минимальной конструкции с некоторой вершиной из максимальной конструкции, принадлежащей ρ_3 (рис. 4). Заметим, что максимальная конструкция, состоящая из четырех вершин, является простым циклом, для которого множество ρ_3 пусто. В этом случае склеивается некоторая вершина минимальной конструкции с некоторой вершиной максимальной конструкции. Новая конструкция будет содержать n вершин. Пусть максимальная конструкция содержит i вершин без склеенной вершины, $i \geq 3$. Тогда минимальная конструкция будет содержать $n - i$ вершин (со склеенной вершиной). Легко убедиться в том, что построенная конструкция является тупиковой, так как хотя бы один конец любого ребра принадлежит множеству ρ_2 . Число ребер в минимальной части равно $n - i$, а число ребер в максимальной части $2(i + 1 - 2) = 2(i - 1)$. Следовательно, число ребер в целом будет $n - i + 2(i - 1) = n + i - 2$. При $i = 3$ получим $n + 1$ ребер, при $i = 4$ получим $n + 2$ и т.д., при $i = n - 3$ получим $n + (n - 3) - 2 = 2n - 5$ ребер. Только минимальная конструкция содержит n ребер, а только максимальная конструкция - $2(n - 2)$ ребер.

Теорема 2 доказана.

Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА

Ս.Մ. Վարդանյան

Երկլեմենյա ենթաբազմությունների դասում փակուղային ճանաչող համակարգերի երկարության մասին

$[n] = \{1, 2, n\}$ վերջավոր բազմության ենթաբազմությունների համակարգը կոչվում է $[n]$ -ը ճանաչող, եթե կամայական մեկ էլեմենտանոց բազմություն $\{i\}$, $1 \leq i \leq n$, կարելի է ներկայացնել այդ համակարգի ինչ-որ բազմությունների հապման միջոցով: Դիտարկվում են այնպիսի համակարգեր, որոնք պարունակում են միայն երկլեմենյա ենթաբազմություններ: Այդպիսի համակարգը կոչվում է մինիմալ, եթե գոյություն չունի ավելի փոքր հզորության ճանաչող համակարգ, և կոչվում է փակուղային, եթե այդ համակարգի ցանկացած խիստ ենթահամակարգ չի ճանաչում $[n]$ -ը: Ապացուցվում է, որ (1) ներկայացված տեսքի ցանկացած փակուղային ճանաչող համակարգի հզորությունը $\leq 2(n-2)$; (2) կամայական j -ի համար, $n \leq j \leq 2(n-2)$, գոյություն ունի նկարագրված տեսքի փակուղային ճանաչող համակարգ՝ j հզորության:

S. M. Vardanyan

On the Lengths of Deadlock Recognizing Systems in the Class of Subsets, Consisting of Two Elements

A system S of subsets of the set $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ is said to be recognizing $[n]$, if every set $\{i\}$, $1 \leq i \leq n$ can be represented as an intersection of sets belonging to S . Only subsets containing two elements are considered. A recognizing system S of such subsets is said to be minimal if there is no recognizing system having the power less than S ; it is said to be deadlock if every its proper subsystem is not recognizing. It is proved that (1) every deadlock recognizing system of the mentioned kind has the power $\leq 2(n-2)$; (2) for every j , $n \leq j \leq 2(n-2)$ there exists a deadlock recognizing system of the mentioned kind having the power j .

Էնթաթաթաթա

1. *Варданын С.М.* - Тр. Ин-та проблем информатики и автоматизации. Мат. вопросы кибернетики и вычислительной техники. Ереван. 2005. Т. 24. С.144-146.
2. *Vardanyan S.M.* Computer science and information technologies. Proceedings of the conference CSIT. Yerevan. Armenia. 2005. P. 161-162.
3. *Harary F.* Graph Theory. Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.