ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 107 2007 №1

Ì ÀÒÅ Ì ÀÒÈ ÊÀ

УДК 517.53

À. Ì . Äæðáàøÿí, Â. À. Äæðáàøÿí

Ï ðîåêöèîííàÿ òåîðåìà äëÿ ïðîñòðàíñòâ A^p_ω â ïîëóïëîñêîñòè

(Представлено академиком Н.У. Аракеляном 23/VIII 2006)

Êëþ÷åâûå ñëîâà: *весовые пространства, регулярные функции*

В статье установлено, что формула канонического представления весовых банаховых пространств A^p_ω голоморфных в полуплоскости функций определяет ограниченный проектор из Лебегова пространства L^p_ω в A^p_ω при некоторых ограничениях на вес. На основе этого с точностью до изоморфизма описано сопряженное пространство $(A^p_\omega)^*$.

1. Общие весовые пространства $A^p_{\omega,\gamma}$ $(1 \leq p < +\infty, -\infty < \gamma < 1)$ голоморфных в верхней полуплоскости $G^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ функций были введены в работе [1]. Отметим, что пространства $A^p_{\omega,\gamma}$ существенно отличаются от весовых пространств в полуплоскости, рассмотренных М.М. и А.Э. Джрбашянами [2], хотя совпадают с ними в некоторых простых случаях. В частности, функции пространств $A^p_{\omega,\gamma}$ могут иметь любой рост вблизи конечных точек вещественной оси. В этом смысле они более подобны своим круговым аналогам, исследованным в [4]. Для определения пространств $A^p_{\omega,\gamma}$ сперва введем множество допустимых мер.

Î ïðåäåëåíèå 1. Пусть Ω_α $(-1 \leq \alpha < +\infty)$ - множество тех функций $\omega(t)$, которые заданы на $[0, +\infty)$ и подчинены условиям

(i) $\omega(t) \nearrow$ (не убывает) в $(0, +\infty)$, $\omega(0) = \omega(+0)$ и существует последовательность $\delta_k \downarrow 0$ такая, что $\omega(\delta_k) \downarrow$ (строго убывает);

(ii) $\omega(t) \asymp t^{1+\alpha}$ при некотором $\Delta_0 \geq 0$ и любом $\Delta_0 \leq t < +\infty$

(обозначение $f(t) \asymp g(t)$ применяется в том смысле, что $m_1 f(t) \leq g(t) \leq m_2 f(t)$ при некоторых постоянных $m_{1,2} > 0$).

Пространства же $A^p_{\omega,\gamma}$ $(1 \le p < +\infty,\ -\infty < \gamma < 1)$ введены в [1] как множества тех голоморфных в G^+ функций $f(z)$, которые подчинены следующим ограничениям на рост: при достаточно малом $\rho > 0$

$$\liminf_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \int_{\beta}^{\pi-\beta} \left| f(Re^{i\vartheta}) \right|^p \left(\sin \frac{\pi(\vartheta-\beta)}{\pi-2\beta} \right)^{\pi/\kappa-1} d\vartheta = 0, \tag{1}$$

$$\|f\|^p_{p,\omega,\gamma} \equiv \iint_{G^+} |f(z)|^p \frac{d\mu_\omega(z)}{(1+|z|)^\gamma} < +\infty, \tag{2}$$

где $\beta = \arcsin\frac{\rho}{R} = \frac{\pi}{2} - \kappa$ и $d\mu_\omega(x+iy) = dxd\omega(2y)$ и, кроме того,

1°. $\omega(t)$ удовлетворяет условию (i) определения 1 и такова, что $\omega(t) = \omega(\Delta)$ $(\Delta < t < +\infty)$ при некотором $\Delta > 0$, или, альтернативно,

2°. $\omega(t) \in \Omega_\alpha$ при некоторых $\alpha \ge -1$ и $\gamma < 1$.

В [1] доказано, что $A^p_{\omega,\gamma}$ $(1 \le p < +\infty, -\infty < \gamma < 1)$ - банаховы пространства и, в частности, установлено каноническое представление

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{G^+} f(w) C_\omega(z-\overline{w}) d\mu_\omega(w), \quad z \in G^+, \quad f(z) \in A^p_{\omega,\gamma}, \tag{3}$$

где интеграл равномерно сходится внутри G^+, а ядро имеет вид

$$C_\omega(z) = \int_0^{+\infty} e^{itz} \frac{dt}{I_\omega(t)}, \quad I_\omega(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} d\omega(x)$$

и является голоморфной в G функцией при $\omega(t) \in \Omega_\alpha$ $(\alpha \ge -1)$.

2. В данной статье, с применением точных оценок ядер $C_\omega(z)$, установленных в [5], доказаны следующие две теоремы о проекторе из $L^p_{\omega,0}$ в $A^p_{\omega,0}$ и сопряженном пространстве $A^p_{\omega,0}$ $(p \ne 2)$.

Òåîðåìà 1. *Пусть* $1 < q < +\infty$, $q \ne 2$, *и пусть функции* $\omega_1 \in \Omega_{\kappa_1}$ *и* $\omega_2 \in \Omega_{\kappa_2}$ $(\kappa_{1,2} > -1)$ *непрерывно дифференцируемы в* $[0, +\infty)$ *и удовлетворяют следующим условиям* (A) *и* (B)*:*

(A) $t^{-1}\omega_2'(t) \nearrow$ *или, альтернативно,* $t^{-1}\omega_2'(t) \searrow$, *но* $t^{-\delta}\omega_2'(t) \nearrow$ *при некотором* $\delta \in (0,1)$. *Кроме того,*

$$t^{-\alpha_{1,2}}\omega_2'(t) \searrow \qquad t^{-\beta_{1,2}}\omega_2'(t) \nearrow \qquad (0, +\infty) \tag{4}$$

при некоторых $\alpha_{1,2} > 0$ *и* $\beta_{1,2} > 0$ *таких, что*

$$\alpha_1 < 1 + \beta_1 + \beta_2, \quad 1 + \alpha_1 < q(1+\beta_2) \qquad q(\alpha_2 - \beta_2) < 2 + \beta_1. \tag{5}$$

(B) $t^{-1}\omega_2(t)\ \searrow$ *и* $t^{-\delta}\omega_2(t)\ \nearrow$ *при некотором* $\delta \in (0,1)$. *Кроме того,* $\omega_2'(t) \searrow$ *и* (4) *справедливо при некоторых* $\alpha_{1,2} \in (-1,0)$ *и* $\beta_{1,2} \in (-1,0)$, *удовлетворяющих* (5).

Тогда оператор

$$P_{\omega_2} f(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{G^+} f(w) C_{\omega_2}(z - \overline{w}) d\mu_{\omega_2}(w) \tag{6}$$

является ограниченным проектором, переводящим $L^q_{\omega_1,0}$ *в* $A^q_{\omega_1,0}$.

Äîêàçàòåëüñòâî будет проведено путем проверки справедливости известных тестовых условий Шура для функции $g(t) = t^{-\lambda}$ и ядра

$$K(z,\zeta) = \frac{\omega_2'(2\eta)}{\omega_1'(2\eta)} \left| C_{\omega_2}(z - \overline{\zeta}) \right|, \quad z \in G^+,\ \zeta = \xi + i\eta \in G^+,$$

т.е. будет установлено, что при некоторых λ верны оценки

$$I_1(z) \equiv \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\zeta = \xi + i\eta \in G^+} K(z,\zeta)[g(\eta)]^p d\mu_{\omega_1}(\zeta) \le a[g(y)]^p, \quad z = x + iy \in G^+, \tag{7}$$

$$I_2(\zeta) \equiv \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{z = x + iy \in G^+} K(z,\zeta)[g(y)]^q d\mu_{\omega_1}(z) \le b[g(\eta)]^q, \quad \zeta = \xi + i\eta \in G^+, \tag{8}$$

где $1/p = 1 - 1/q$ и $a, b > 0$ - положительные постоянные. Этим будет доказано, что оператор

$$SF(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{G^+} K(z,\zeta) F(\zeta) d\mu_{\omega_1}(\zeta), \quad z \in G^+, \tag{9}$$

ограничен в $L^q_{\omega_1,0}$ и $\|S\| \le a^{1/q} b^{1/p}$ (см., напр., [3], с. 35).

Как нетрудно заметить, при выполнении условия **(A)** для ядра $C_{\omega_2}(z)$ верна оценка (1.7) из [5]. Тем самым

$$I_1(z) \le \frac{M}{2\pi} \int_0^{+\infty} \eta^{-\lambda p} \frac{\omega_2'(2\eta)}{\omega_1'(2\eta)} \frac{d\omega_1(2\eta)}{\omega_2'(y+\eta)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{|z - \overline{\zeta}|^2}$$

$$= \frac{M}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\eta^{-\lambda p}}{y+\eta} \frac{\omega_2'(2\eta)}{\omega_1'(2\eta)} \frac{d\omega_1(2\eta)}{\omega_2'(y+\eta)} = M \int_0^{+\infty} \frac{\omega_2'(2\eta)}{\omega_2'(y+\eta)} \frac{\eta^{-\lambda p}}{y+\eta} d\eta.$$

Далее, поскольку $\omega_2'(x) x^{-\beta_2} \nearrow$ и $2\eta < y + \eta$, то

$$\int_0^y \frac{\omega_2'(2\eta)}{\omega_2'(y+\eta)} \frac{\eta^{-\lambda p}}{y+\eta} d\eta = \int_0^y \frac{\omega_2'(2\eta)\eta^{-\lambda p} d\eta}{\omega_2'(y+\eta)(y+\eta)^{-\beta_2}(y+\eta)^{1+\beta_2}}$$

$$< 2^{\beta_2} \int_0^y \frac{\eta^{\beta_2 - \lambda p} d\eta}{(y+\eta)^{1+\beta_2}} = 2^{\beta_2} y^{-\lambda p} \int_0^1 \frac{t^{\beta_2 - \lambda p} dt}{(1+y)^{1+\beta_2}} \equiv C_1 [g(y)]^p, \quad \lambda < \frac{1+\beta_2}{p}.$$

С другой стороны,

$$\int_y^{+\infty}\frac{\omega_2'(2\eta)}{\omega_2'(y+\eta)}\frac{\eta^{-\lambda p}}{y+\eta}d\eta=2^{\alpha_2}\int_y^{+\infty}\frac{\omega_2'(2\eta)(2\eta)^{-\alpha_2}\eta^{\alpha_2-\lambda p}d\eta}{\omega_2'(y+\eta)(y+\eta)}$$

$$<2^{\alpha_2}\int_y^{+\infty}\frac{\eta^{\alpha_2-\lambda p}d\eta}{(y+\eta)^{1+\alpha_2}}=2^{\alpha_2}y^{-\lambda p}\int_1^{+\infty}\frac{t^{\alpha_2-\lambda p}dt}{(1+t)^{1+\alpha_2}}\equiv C_2[g(y)]^p,\quad \lambda>0,$$

ввиду того, что $\omega_2'(x)x^{-\alpha_2}\searrow$. Таким образом, (7) верно при некотором $\lambda\in(0,(1+\beta_2)/p)$. Для проверки условия (8) заметим, что ввиду отмеченной оценки ядра $C_{\omega_2}(z)$

$$I_2(\zeta)\le\frac{M}{\pi}\frac{\omega_2'(2\eta)}{\omega_1'(2\eta)}\int_0^{+\infty}y^{-\lambda q}\frac{\omega_1'(2y)}{\omega_2'(y+\eta)}dy\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{|z-\overline{\zeta}|^2}$$

$$\le M\frac{\omega_2'(2\eta)}{\omega_1'(2\eta)}\int_0^{+\infty}\frac{\omega_1'(2y)y^{-\lambda q}dy}{\omega_2'(y+\eta)(y+\eta)}.$$

Поэтому, рассуждая как выше, получим

$$\frac{\omega_2'(2\eta)}{\omega_1'(2\eta)}\int_0^{\eta}\frac{\omega_1'(2y)y^{-\lambda q}dy}{\omega_2'(y+\eta)(y+\eta)}=2^{\beta_1}\frac{\omega_2'(2\eta)}{\omega_1'(2\eta)}\int_0^{\eta}\frac{\omega_1'(2y)(2y)^{-\beta_1}y^{\beta_1-\lambda q}dy}{\omega_2'(y+\eta)(y+\eta)^{-\alpha_1}(y+\eta)^{1+\alpha_1}}$$

$$\le 2^{\alpha_1}\eta^{\alpha_1-\beta_1}\int_0^{\eta}\frac{y^{\beta_1-\lambda q}dy}{(y+\eta)^{1+\alpha_1}}=C_3[g(\eta)]^q,\qquad \lambda<\frac{1+\beta_1}{q},$$

$$\frac{\omega_2'(2\eta)}{\omega_1'(2\eta)}\int_{\eta}^{+\infty}\frac{\omega_1'(2y)y^{-\lambda q}dy}{\omega_2'(y+\eta)(y+\eta)}=\frac{\omega_2'(2\eta)}{\omega_1'(2\eta)}\int_{\eta}^{+\infty}\frac{\omega_1'(2y)(2y)^{-\alpha_1}(2y)^{\alpha_1-\lambda q}dy}{\omega_2'(y+\eta)(y+\eta)^{-\beta_2}(y+\eta)^{1+\beta_2}}$$

$$\le 2^{\beta_2}\eta^{\beta_2-\alpha_1}\int_{\eta}^{+\infty}\frac{y^{\alpha_1-\lambda q}dy}{(y+\eta)^{1+\beta_2}}=C_4[g(\eta)]^q,\qquad \lambda>\frac{\alpha_1-\beta_2}{q}.$$

Итак, (7) справедливо при $\lambda\in((\alpha_1-\beta_2)/q,(1+\beta_1)/q)$ ($\ne\emptyset$, так как $\alpha_1<1+\beta_1+\beta_2$), и обе оценки (7) и (8) верны при

$$\lambda\in\left(0,\frac{1+\beta_2}{p}\right)\bigcap\left(\frac{\alpha_1-\beta_2}{q},\frac{1+\beta_1}{q}\right)=\left(\frac{\alpha_1-\beta_2}{q},\frac{1+\beta_2}{p}\right)$$

($\ne\emptyset$, так как $(\alpha_1-\beta_2)/q<(1+\beta_2)/p$, $1+\alpha_1<q(1+\beta_2)$). Тем самым оператор (9) ограничен в $L^q_{\omega_1,0}$ и таковым является также P_{ω_2}, так как при любом $F\in L^q_{\omega_1,0}$

$$|P_{\omega_2}F(z)|\le\frac{1}{2\pi}\iint_{G^+}|F(\zeta)|\left|C_{\omega_2}(z-\overline{\zeta})\right|d\mu_{\omega_1}(\zeta)$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\iint_{G^+}K(z,\zeta)|F(\zeta)|d\mu_{\omega_1}(\zeta)=S|F(z)|,\quad z\in G^+.$$

Отсюда следует, что $\|P_{\omega_2}F\|_{q,\omega_1,0}\le\|S|F|\|_{q,\omega_1,0}\le\|S\|\,\|F\|_{q,\omega_1,0}<+\infty$ и тем самым $P_{\omega_2}F\in L^q_{\omega_1,0}$ при любом $F\in L^q_{\omega_1,0}$.

Для доказательства включения $P_{\omega_2}F \in A^q_{\omega_1}$ воспользуемся оценкой ядра C_{ω_2}, неравенством Гельдера и докажем, что выполнено условие (1). Как можно проверить, при $\mathrm{Im}\, z = y \geq y_0 > 0$ и некоторых постоянных $M_{1,2,3}$

$$\iint_{G^+} |F(\zeta)||C_{\omega_2}(z-\overline{\zeta})|d\mu_{\omega_2}(\zeta) \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_0^{+\infty} \frac{\omega_2'(2\eta)|F(\zeta)|d\omega_1(2\eta)}{\omega_1'(2\eta)\omega_2'(y+\eta)|z-\overline{\zeta}|^2}$$

$$\leq M_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{\int_0^{+\infty} |F(\zeta)|^q d\omega_1(2\eta)\right\}^{1/q} \left\{\int_0^{+\infty} \frac{[\omega_2'(2\eta)]^p d\eta}{[\omega_1'(2\eta)]^{p-1}[\omega_2'(y+\eta)]^p|z-\overline{\zeta}|^{2p}}\right\}^{1/p} d\xi$$

$$\leq M_2\|F\|_{q,\omega_1,0} \left\{\left(\int_0^1 + \int_1^{+\infty}\right) \frac{[\omega_2'(2\eta)]^p d\eta}{[\omega_1'(2\eta)]^{p-1}[\omega_2'(y+\eta)]^p(1+\eta)^{2p-1}}\right\}^{1/p}$$

$$\leq \left[\frac{\omega_2'(2)}{\omega_2'(y_0)}\right]^q \frac{M_2\|F\|_{q,\omega_1,0}}{[\omega_1'(2)]^{p-1}} \left\{\int_0^1 \frac{\eta^{p\beta_2-(p-1)\alpha_1} d\eta}{(1+\eta)^{2p-1}} + y_0^{\beta_2} \int_1^{+\infty} \frac{\eta^{p\alpha_2-(p-1)\beta_1} d\eta}{(1+\eta)^{2p-1}(y_0+\eta)^{p\beta_2}}\right\}$$

$$\leq M_3\|F\|_{q,\omega_1,0} \left\{\int_0^1 \eta^{p\beta_2-(p-1)\alpha_1} d\eta + \int_1^{+\infty} \eta^{p(\alpha_2-\beta_2)-(p-1)\beta_1-2p+1} d\eta\right\} < +\infty.$$

На основе этой оценки нетрудно доказать голоморфность функции $P_{\omega_2}F(z)$ в G^+. Для доказательства же того, что $P_{\omega_2}F(z)$ удовлетворяет условию (1), достаточно заметить, что

$$\left|P_{\omega_2}F(Re^{i\vartheta})\right| \leq \frac{M}{2\pi} \iint_{G^+} \frac{\omega_2'(2\eta)|F(\zeta)|d\mu_{\omega_1}(\zeta)}{\omega_1'(2\eta)\omega_2'(y+\eta)|Re^{i\vartheta}-\overline{\zeta}|^2}$$

$$\leq \frac{M}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{\int_0^{+\infty} |F(\zeta)|^q d\mu_{\omega_1}(\zeta)\right\}^{1/q}$$

$$\times \left\{\int_0^{+\infty} \left[\frac{\omega_2'(2\eta)}{\omega_2'(y+\eta)}\right]^p \frac{d\eta}{[\omega_1'(2\eta)]^{p-1}[(x-\xi)^2+(\rho+\eta)^2]^p}\right\}^{1/p} d\xi$$

$$\leq M_4\|F\|_{q,\omega_1,0} \left\{\int_0^1 \eta^{p\beta_2-(p-1)\alpha_1} d\eta + \int_1^{+\infty} \eta^{p(\alpha_2-\beta_2)-(p-1)\beta_1-2p+1} d\eta\right\}^{1/p} < +\infty$$

при $Re^{i\vartheta} = x+iy$ $(y \geq \rho > 0)$ и некоторой постоянной M_4.

Остается доказать, что все вышеприведенные утверждения верны также при условии (B). Для этого заметим, что

$$C_{\omega_2}(z) = i\int_y^{+\infty} C_{\omega_2}'(x+it)dt, \quad z = x+iy \in G^+,$$

где правый интеграл абсолютно сходится ввиду оценки ядра $C_\omega'(z)$, установленной в теореме 1.2 [5]. Используя эту оценку и условие $t^{-\beta_2}\omega_2'(t) \nearrow$ $(-1 < \beta < 0)$, получим

$$|C_{\omega_2}(z)| \leq M \int_y^{+\infty} \frac{dt}{|x+it|^2\omega_2'(t)t} \leq \frac{My^{\beta_2}}{\omega_2'(y)} \int_y^{+\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)t^{1+\beta_2}}$$

$$= M \frac{y^{\beta_2}}{\omega_2'(y)} \frac{1}{|x|^{2+\beta_2}} \int_{y/|x|}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)t^{1+\beta_2}}.$$

Если $y/|x| \geq 1$, то

$$\int_{y/|x|}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)t^{1+\beta_2}} \leq \int_{y/|x|}^{+\infty} \frac{dt}{t^{3+\beta_2}} = \frac{1}{2+\beta_2} \left(\frac{|x|}{y}\right)^{2+\beta_2}.$$

Кроме того, если $y/|x| < 1$, то

$$\int_{y/|x|}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)t^{1+\beta_2}} \leq \left(\int_{y/|x|}^{1} + \int_{1}^{+\infty}\right) \frac{dt}{(1+t^2)t^{1+\beta_2}}$$

$$\leq \int_{y/|x|}^{1} \frac{dt}{t^{1+\beta_2}} + M_1 = \frac{1}{|\beta_2|} \left[\left(\frac{|x|}{y}\right)^{\beta_2} - 1\right] + M_1 \leq M_2 \left(\frac{|x|}{y}\right)^{2+\beta_2}.$$

Следовательно, $|C_{\omega_2}(z)| \leq M_5 \big[|z|^2 \omega_2'(y)\big]^{-1}$ $(z = x + iy \in G^+)$ при некоторой постоянной M_5, и доказательство завершается повторением рассуждения, примененного в случае выполнения (A).

Çàìå÷àíèå 1. Условия теоремы 1 не исключают совпадения $\omega_1(t) = \omega_2(t)$ $(0 < t < +\infty)$. Если $\omega \equiv \omega_{1,2}$ (и $\kappa = \kappa_1 = \kappa_2$), то в силу представления (3) теорема 1 (с заменой q на p) утверждает, что формулой (3) определяется ограниченный проектор $L^p_{\omega,0} \longrightarrow A^p_{\omega,0}$, если только $(1+\kappa)(p-1) < 1$.

Òåîðåìà 2. *Пусть* $1 < p < +\infty$, $p \neq 2$ *и пусть функция* $\omega \in \Omega_\kappa$ $(-1 < \kappa < +\infty,\ (1+\kappa)(p-1) > 1)$ *удовлетворяет условиям теоремы 1 при* $\omega_1 \equiv \omega_2 \equiv \omega$. *Тогда множество ограниченных линейных функционалов, действующих в* $A^p_{\omega,0}$, *полностью описывается формулой*

$$\Phi(f) = \frac{1}{2\pi} \iint_{G^+} f(z)\overline{g(z)} d\mu_\omega(z), \quad g \in A^q_{\omega,0} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right) \tag{10}$$

и $\left(A^p_{\omega,0}\right)^* = A^q_{\omega,0}$ *в смысле изоморфизма пространств.*

Äîêàçàòåëüñòâî. Очевидно, что для любой функции $g \in A^q_{\omega,0}$ (и даже любого $g \in L^q_{\omega,0}$) формулой (10) определяется ограниченный линейный функционал на $A^p_{\omega,0}$ и $\|\Phi\| \leq \|g\|_{q,\omega,0}$. Для доказательства обратного утверждения воспользуемся теоремой Хана - Банаха и расширим заданный на $A^p_{\omega,0}$ ограниченный линейный функционал Φ на все пространство $L^p_{\omega,0}$ без изменения нормы. Применив то же обозначение Φ для расширенного функционала, найдем функцию $\varphi(z) \in L^q_{\omega,0}$ такую, что

$$\Phi(f) = \frac{1}{2\pi} \iint_{G^+} f(z)\overline{\varphi(z)} d\mu_\omega(z), \quad f \in A^p_{\omega,0},$$

и $\|\Phi\| = \|\varphi\|_{q,\omega,0}$. Далее, заметим, что подставив сюда представление (3) функции $f(z)$, можно поменять порядок интегрирования в силу теоремы Фубини, поскольку по теореме 1

$$\|P_\omega|\varphi|\|_{q,\omega,0} \leq M_{p,\omega} \|\varphi\|_{q,\omega,0} < +\infty,$$

где постоянная $M_{p,\omega}$ зависит лишь от p и ω. Таким образом, мы приходим к формуле (10), где

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{G^+} \varphi(\zeta) C_\omega(z - \overline{\zeta}) d\mu_\omega(\zeta), \quad z \in G^+,$$

и $\|g\|_{q,\omega,0} \leq M_{p,\omega} \|\varphi\|_{q,\omega,0} = M_{p,\omega} \|\Phi\|$.

Çàìå÷àíèå 2. Очевидно, что $A^p_{\omega,0} = A^p_{æ,0}$ при любых непрерывно-дифференцируемых функциях ω и $\widetilde{\omega}$ таких, что $\omega'(x) \asymp \widetilde{\omega}'(x)$ $(0 \leq x < +\infty)$. К тому же нетрудно проверить, что условия теоремы 2 удовлетворены для $\omega(x) = \int_0^x t^\alpha \log^\lambda \left(1 + \frac{a}{t}\right) dt$ $(0 \leq x < +\infty)$, где $\alpha > -1$, $\lambda \geq 0$ и $a > 0$ - любые числа. Тем самым утверждение теоремы 2 верно для всех функций $\omega \in \Omega_\alpha$ $(-1 < \alpha < +\infty)$ таких, что $\omega'(x) \asymp x^\alpha \log^\lambda \left(1 + \frac{a}{x}\right)$ $(0 \leq x < +\infty)$ при $\alpha > -1$, $\lambda \geq 0$ и $a > 0$.

Институт математики НАН РА — armen_jerbashian@yahoo.com

Ереванский государственный университет — vahagn_jerbashian@yahoo.co.uk

Ա. Մ. Ջրբաշյան, Վ. Ա. Ջրբաշյան

Պրոեկցիոն թեորեմ կիսահարթության A^p_ω փարածությունների համար

Հոդվածում ապացուցված է, որ կշռի որոշ սահմանափակումների դեպքում կիսահարթության մեջ հոլոմորֆ ֆունկցիաների Բանախյան կշռային A^p_ω փարածությունների կանոնական ներկայացման բանաձևով փրված է սահմանափակ պրոեկփոր՝ L^p_ω Լեբեգյան փարածությունից A^p_ω: Սրա հիման վրա իզոմորֆիզմի ճշփությամբ նկարագրված է $(A^p_\omega)^*$ համալուծ փարածությունը:

A.M.Jerbashian, V.A.Jerbashian

Projection Theorem for Spaces A^p_ω in the Half-Plane

It is proved that under some weight requirements the canonical representation formula of the weighted Banach spaces A^p_ω of functions holomorphic in the half-plane defines a bounded projection of the Lebesgue space L^p_ω to A^p_ω. This is used for complete description of the conjugate spaces $(A^p_\omega)^*$, up to isomorphisms.

Ëèòåðàòóðà

1. *Jerbashian A. M.* - In: Operator Theory: Advances and Applications. Birkhauser Verlag, Basel, 2005. V. 158. P. 141-158.

2. *Djrbashian M. M., Djrbashian A. E.* - ДАН СССР. 1985. Т. 285. N 3. С. 547-550.

3. *Djrbashian A. E., Shamoian F. A.* Teubner-Texte zur Math. B. 105. Leipzig. 1988. 220 p.

4. *Jerbashian A. M.* - Complex Variables. 2005. V. 50. N 3. P. 155-183.

5. *Jerbashian A. M.* - Archives of Inequalities and Applications. 2003. N 1. P. 399-412.